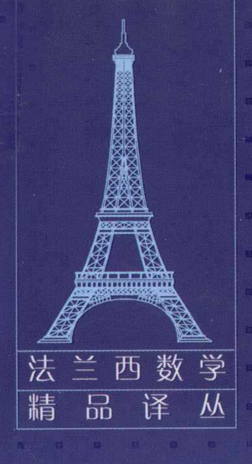
“十一五”国家重点图书



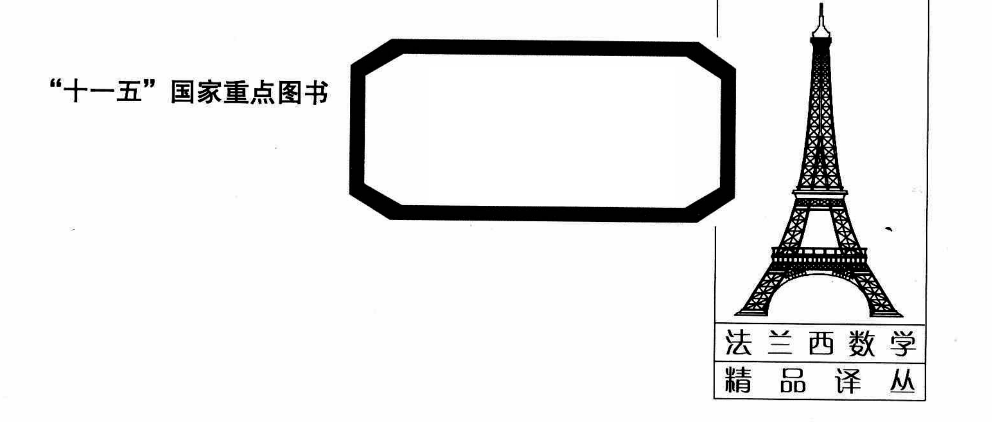
概率与位势（第I卷）

可测空间

□ C. 德拉歇利　P.-A. 梅耶　著
□ 李欣鹏　姚一隽　译
□ 许明宇　校



“十一五”国家重点图书



数学天元基金资助项目

概率与位势（第Ⅰ卷）

Gailü yu Weishi

可测空间

□ C. 德拉歇利 P.-A. 梅耶 著
□ 李欣鹏 姚一隽 译
□ 许明宇 校

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字：01-2009-3890 号
Probabilité et potential (Volume I)
Claude Dellacherie, Paul-André Meyer
ISBN 2-7056-1372-2

图书在版编目(CIP)数据

概率与位势. 第1卷, 可测空间/(法)德拉歇利,(法)梅耶著;李欣鹏,姚一隽译. --北京:高等教育出版社, 2012.1
(法兰西数学精品译丛)
ISBN 978-7-04-032294-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①德… ②梅… ③李… ④姚… Ⅲ.①随机分析-研究 ②可测空间-研究 Ⅳ.①O211.6 ②O153.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第231568号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李华英　　封面设计 张　楠　　版式设计 余　杨
责任校对 胡美萍　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.25	版　　次	2012年1月第1版
字　　数	250千字	印　　次	2012年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	48.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　32294-00

《法兰西数学精品译丛》编委会

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的

限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

中译本序

我非常高兴能够在 21 世纪看到《概率与位势》的一个新的版本。该书的法文原版在 1975 至 1992 年间由 Hermann 出版社出版, 从 1979 至 1988 年先后由 North Holland 和 Elsevier 出版社出了部分章节的英译本. 这次能够出版中译本, 先师 Paul-André Meyer (他于 2003 年去世) 泉下有知, 定当备感欣慰. 他为促进中法两国数学界的交流付出过极多的心血; 而且如果我没有记错的话, 他对于书面和口语的中文都有一定的了解, 我就不行了.

1968 年, Meyer 在《斯特拉斯堡概率论讨论班讲义》的第 II 卷 (Springer 的 LNM 系列丛书第 51 卷) 中发表了《过程的 "一般" 理论的详导 (Guide détaillé de la théorie "générale" des processus)》, 俗称为 "灰色导引", 其中还援引了孔夫子的一句话[①]. 1972 年 Springer 出版了我的小书《容度和随机过程》, 其中的第二部分基本上就是把 "灰色导引" 的内容加以详述并有所补充, 阐述斯特拉斯堡学派关于过程的一般理论的工作. Meyer 挺喜欢我那本书的, 并且在 1973 年前后建议我跟他合作, 撰写他那本《概率与位势》(Hermann 出版社 1966 年初版, 同年即有 Blaisdell 翻译的英文版) 的新版 (其实是完全重新写过, 篇幅也大大地增加了). 我当然答应了, 但是并没有想到这会整整耗去十五六年的光阴, 而且最后的产出是煌煌五卷, 而不是最初设想的一本.

虽然按照字典序把我的名字列在前面, 也不用否认我在这套书 (以及 Maisonneuve 在第 V 卷) 中的贡献的重要性, 但是毫无疑问的, Meyer 才是这项工程自始至终、从内容到形式的总负责人. 他甚至还亲力亲为, 干泥水匠的活: 第 I 卷和第 II

[①]译校者注: 指的是《论语 • 子路》中 "必也正名乎" 一句, Meyer 在文中给出了一些概念的 "现代" 名称.

卷的前 2/3 内容是斯特拉斯堡的秘书打出来的, 其他的都是 Meyer 自己在一台 "走私" 的打字机上打出来的 (最后一卷是用 TEX 书写的). 在那个年代, 用一台改装过的打字机和一套可以替换的铅字模块打数学文章需要一定的手工技术, 还是颇有趣的 (我自己就有一台这样的机器). 那个年代没有 "删除 — 复制 — 粘贴" 的软件, 凡事都要实实在在地动手, 要用 "剪刀 — 打字机 — 糨糊瓶", 才能对已经打好的文字做修改, 还必须保持行数不变 —— 这是一项我很喜欢的益智游戏.

Meyer 和我对于数学的美感有相同的理解, 对于好的法语有同样的追求, 对于书写编辑的工整也同样在乎. 不仅如此, 我们还有一模一样的打字机, 所以从 "打字稿" 中是难以辨别出哪些是他写的, 哪些是我写的. 我们之间的关系可能仅仅用融洽来形容还不够, 但是 Meyer 工作起来很快 (Walsh 称他为 "西方最快的机器"), 而我那时 (现在也是) 非常之慢. Meyer 很可能因此而感到不舒服, 尽管我并非故意如此.

除了用 Tex 写的第 V 卷以外, 本书的法文版基本上和 Meyer 的打字稿是一模一样的 (页码、标题等是出版社加的). 现在这看上去显得陈旧也不好看, 但是 40 年前, 我们的确都习惯于阅读这样在打字机上打出来的论文或者书稿. Hermann 出版社曾经多次向我们承诺, 会真正排版印刷本书, 但是至今也没有兑现. 因此我非常高兴能够 (对于写作这篇序言的时间来说) 在不久的将来看到本书的一部分能够用漂亮的汉字印刷出版.

Claude Dellacherie

2011 年 9 月 8 日于法国鲁昂

前言

从原则上说, 书名的作用是通过若干个关键词来简明扼要地告诉读者本书的内容. 正因为此, 我们觉得有必要马上提醒读者, 本卷只包含了很少的概率论, 而且完全没有涉及位势论[①]. 概率论将在后面的一卷里面出现 (鞅论和随机积分), 而位势论 (预解和半群理论) 要排在更后面。至于联结这两部分的那个 "与" 字所涉及的内容, 已经推后到了一个我们想都不敢想的遥远的未来。实际上, 在这一卷里面, 先是对测度论做了简单的回顾, 然后还有两个比较长的章节, 一章是关于解析集和容度, 另一章则是关于随机过程理论的基础的。

为什么用这个标题呢? 在 1966 年, 本书的第二作者已经出版了一本名为《概率与位势》的书。该书有 11 章, 所涵盖的内容远比眼前这本书要广泛。它只缺少 "与" 字所涉及的内容, 原计划在第 II 卷中讨论。该卷中的一部分初稿在 1967 年以关于 Markov 过程的 "课程讲义" 的形式发表。而现在, 我们不是要完成那个第二部分, 结束这项工程, 而是两个人一起从头再来, 把原来那册第 I 卷的第一部分重新编辑出版。我们这样做有几个理由。首先, 1968 年 Blumenthal 和 Getoor 出版的关于 Markov 过程的专著让我们不再像 1966 至 1967 年间那样迫切地要写一本这方面的标准参考书. 其次, 从 1966 年到现在, 整个理论有了全面的、迅猛的、大幅度的发展. 我们来举几个例子. 在概率论方面, 本书第一版包含了良好可测过程的概念, 而可料过程这个在今天的概率论工作者视为左膀右臂的概念, 在那里都没有明确地写出来. 在位势理论方面, 在一个注记 (第一版, 第 247 页) 中我们提到了一个称为 "拟约化" 的貌不惊人的概念: "我们并不清楚下述定理究竟有什么用处"; 而根据 Mokobodzki 的工作, 现在我们知道那是预解式理论的关键之一. 至于书名中的 "与" 这一部分,

[①]这里我们效仿我们的导师 N. Bourbaki, 在他们的《分析的基础结构》里面没有半点分析.

在介绍 Ray 预解式的最早的一些工作 (第 266 页) 之前, 我们曾告诫读者 “下面这些结果在以后各章中不会用到”, 而现在看来, 这些结果是基础性的. 我们还可以举出许多这样的例子.

自 1966 年以来, 我们的工作条件也大大改观了. 那时, 虽然位势论或者 Markov 过程的专家都已经有很多, 但是对两个领域之间类似于荒漠的领域感兴趣的人少之又少①. 现在的情况就大不一样了 (这里面或许有本书第一版的功劳, 尽管有着很多这样那样不尽如人意之处, 但还是为推广若干想法做出了贡献). 封面上只印了两个人的名字, 但是读者们应该明白, 在这里或者后几卷中讲述的新观点, 都是通过难以计数的交流得来的. 只要读者翻阅一下自 1967 年以来每年都出版的斯特拉斯堡概率讨论班②文集, 就可以对此有一个初步的了解, 而那还只是冰山一角.

这样, 理论的迅猛发展让我们放弃了把本书的第二部分建立在并不牢固的基础上的念头, 而我们身处其间的活跃的数学工作者群体鼓励我们把本书完全重写. 我们的出版商也对我们表示充分的理解和支持, 答应让我们写作一部分, 他们就出版一部分.

从我们的理论的令人惊叹的发展之中, 我们也汲取了若干教训, 至少我们希望如此. 特别的, 我们希望摒弃在许多教科书中都表现出来的一种态度, 即书中所讲述的内容都是绝对真理, 来自于一个理想的世界, 永远不会贬值. 数学当然是一种真理, 但是其价值并不体现在它们是否印刷在精美的纸张上. 许多在 1966 年看来非常热门的结果, 今天人们已经完全不感兴趣、就此消亡了, 而有许多当年很不起眼的小结果, 今天已经发展成了这一领域里非常重要的内容.

所以我们试图让这本书变得尽量活泼有生气一点, 时不时回顾一下, 加一些注记, 并且留一些空间给小技巧和 “无用的” 注记. 我们必须承认, 有些内容的确不够有意思, 有时候我们自己也觉得有点没劲 (在这样的地方读者自己也能够体会出来), 但是这样的事情并不经常发生.

我们保留了第一版的组织结构: 在每一章内, 所有的定理、定义、注记, 都按照它们的出现次序编号: 例如定理 II.31 (表示第 II 章的第 31 段) 后面跟着注记 II.32, 然后是定义 II.33. 这对于引用是方便的, 但是读者们可以想象要在即将完成的一章里面做一些改动是一件多么痛苦的事情. 因此, 书中会有一些不合乎规范的现象 (比如同一个数字出现两次或以上, 用 “b” 等记号区分, 或者偶尔有跳号的现象, 或者有一些平淡无奇的段落也加了编号). 书后面的名词和符号索引, 也是按照这种方式排序的. 参考文献是按照作者的姓名用字典序排的, 但是对于同一个作者的著作, 编号 [1], [2], 没有任何逻辑顺序.

我们要向 Koehly 女士致以真挚的感谢, 她根据手稿从头到尾打字完成了本书, 从来没有发生不愉快, 而且我们希望在将来至少还有五卷交给她打字.

---

①英文版: 也就十来个人.

②译校者注: 参见本书所附 M. Yor 院士撰写的 Meyer 教授生平.

最后, 题献部分: 本来我们没有打算把这本书题献给谁[1], 但是我们最近刚刚从 Frank Knight 那里听说今年[2] Doob 正好 65 岁. 而他的思想在本书第 IV 章中贯穿始终, 也给了整本书以启迪. 所以很自然地我们在这里写下

献给 J.L.Doob 的 65 岁生日.

[1]这对于在老爸工作 (或者假装工作) 的时候让孩子们安静下来的那两位女士实在是太不知感激了.

[2]译校者注: 1975年.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 （010）58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真 （010）82086060
反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn
通信地址 北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部
邮政编码 100120

法兰西数学精品译丛

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

书号	书名	著译者
★24308-6	解析函数论初步	H. 嘉当
★25156-2	微分学	H. 嘉当
★28417-1	广义函数论	L. 施瓦兹
★25801-1	微分几何	M. 贝尔热、B. 戈斯丢
★26362-6	拓扑学教程	G. 肖盖
★25155-5	谱理论讲义	J. 迪斯米埃
★24619-3	拟微分算子和 Nash-Moser 定理	S. 阿里纳克、P. 热拉尔
★29467-5	解析与概率数论导引	G. 特伦鲍姆
★33238-4	概率与位势（第Ⅰ卷）	C. 德拉歇利、P.-A. 梅耶
★31960-6	无穷小计算	J. 迪厄多涅
33238-4	广义系统的精确控制、摄动和稳定性（第一卷）精确控制论	J.-L. 利翁斯
	代数教程	R. 戈德曼
	概率与位势（第Ⅱ卷）	C. 德拉歇利、P. -A. 梅耶
	金融数学导引	El Karoui, E. Gobet
	完全集与三角级数	Jean-Pierre Kahane
	分析与代数原理 (及数论)	Pierre Colmez

说明：加★者已出版.

目录

第 0 章　符号

集合论符号　1

我们将集合 A 的余集记为 $\complement A$, 或者记为更常见的 A^c. 符号 $A\setminus B$ 表示 $A\cap B^c$; $A\triangle B$ 表示对称差 $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. E 中满足某个性质 P 的所有元素组成的集合记为 $\{x\in E: P(x)\}$, 在不产生歧义的情形下, 我们记为 $\{x: P(x)\}$, 或者简记为 $\{P\}$.

函数 f 在集合 A 上的限制记为 $f|_A$. 类似的, 若 $\mathcal{E}$ 为一族子集, 则 $\mathcal{E}|_A$ 表示 $\mathcal{E}$ 中的元素在 A 上的限制①.

集类的封闭性　2

我们经常会用到如下形式的叙述: 集类 $\mathcal{E}$ 对于运算 $(\cdots)$ 封闭, 其中括号内是一些集合运算的符号, 有时带有字母② f,d,q,m, 这些字母分别表示: 有限、可数、任意和单调. 下面的两个例子可以说明它们的具体含义: "$\mathcal{E}$ 对于运算 $(\cup f,\cap q)$ 封闭" 表示 $\mathcal{E}$ 中有限个元素的并集③和任意多个元素的交集仍然属于 $\mathcal{E}$; "$\mathcal{E}$ 对于运算 $(\cup md,{}^c)$ 封闭" 表示 $\mathcal{E}$ 中可数个单调递增元素的并集属于 $\mathcal{E}$, 并且 $\mathcal{E}$ 中任一元素的余集仍然属于 $\mathcal{E}$. 一般说来, 集类或函数族常用花体字母表示.

我们记 $\mathcal{E}_\sigma$ (相应的, $\mathcal{E}_\delta$) 为对于可数并 $(\cup d)$ (相应的, 可数交 $(\cap d)$) 运算封闭且包含 $\mathcal{E}$ 的最小集类, 这些都是集合论中的经典记号. 我们记 $(\mathcal{E}_\sigma)_\delta=\mathcal{E}_{\sigma\delta}$.

---

①译校者注: $\mathcal{E}|_A=\{B\cap A: B\in\mathcal{E}\}$.

②译校者注: 这是法文单词的首字母, 相应的英文单词的首字母为 f,c,a,m.

③Bourbaki 认为有限并包含 "指标集为空集的并集" 的情形, 对有限交亦如此. 此处我们不采用这种形式.

3 格论符号

设 f 和 g 为两个实值函数, 我们分别用 $f \vee g$ 和 $f \wedge g$ 表示 $\sup(f, g)$ 和 $\inf(f, g)$. 符号 f^+ 和 f^- 与它们的经典含义相同: $f^+ = f \vee 0, f^- = (-f) \vee 0$.

更一般的, 我们用 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示最小上界和最大下界: 例如, 由一族 σ-代数 $\mathcal{F}_i$ 的并所生成的最小 σ-代数我们记为 $\vee_i \mathcal{F}_i$.

4 沿着 $\mathbb{R}$ 的极限

符号 $s \uparrow t$ 表示 $s \to t$, $s \leqslant t$; $s \upuparrows t$ 表示 $s \to t$, $s < t$; 对于序列 (s_n), $s_n \uparrow t$ 和 $s_n \upuparrows t$ 有同样的意义, 我们还附带要求 (s_n) 是递增的. 符号 $\downarrow$ 的含义类比可知. 通常, 沿着 $\mathbb{N}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限简记为 $\lim_n$, $\liminf_n$.

5 积分理论

不附加其他说明的话. 测度总是指一个 “抽象可测空间上的非负可数可加集函数”. 我们不假定所有的测度都是 σ-有限的, 否则我们需要讨论的某些位势测度会被排除在外. 不过我们仅考虑有限测度的可数和 (在这样的测度下, 比如说 Fubini 定理仍然是成立的).

符号 $\lambda \vee \mu = \sup(\lambda, \mu)$, $\lambda \wedge \mu = \inf(\lambda, \mu)$, $\mu^+, \mu^-, |\mu| = \mu^+ + \mu^-$ 与它们的经典含义相同. $||\mu||$ 表示 μ 的全变差 $\langle |\mu|, 1 \rangle$ (有时为无穷). 函数 f 关于测度 μ 的积分记为 $\int f(x)\mu(\mathrm{d}x)$[1]: 通常我们简记为 $\int f\mu$; $\dfrac{\mu}{\nu}$ 表示 Radon-Nikodym 分布密度, 此处没有 “d”. 而当 $\mathbb{R}$ 上的测度 μ 作为某个增函数 F 的导数出现时, 我们常用 Stieltjes 积分 $\int f(x)\mathrm{d}F(x)$ 表示. 特别的, 当 $F(x) = x$ 时, 记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

当 μ 为概率测度时, 我们经常将 $\int f\mu$ 记为 $\mathbb{E}[f]$, (特别的, 当 A 为一个复杂事件时) 将 $\int_A f\mu$ 记为 $\mathbb{E}[f, A]$.

6 函数空间

给定拓扑空间 E, 我们用 $\mathcal{C}(E)$, $\mathcal{C}_b(E)$, $\mathcal{C}_c(E)$, $\mathcal{C}_0(E)$ 分别表示由连续、有界连续、连续且具有紧支集、(当 E 为局部紧空间时) 连续且在无穷远处趋于 0 的实值函数所构成的空间. 我们在这些符号上加一个 “+” (例如 $\mathcal{C}^+(E)$ 等) 表示相应空间中由非负函数全体组成的锥. 我们常用 $\mathcal{C}_c^\infty(E)$ 表示具有紧支集的无穷次可微函数空间 (此时我们需假设 E 为流形, 通常就是 $\mathbb{R}^n$).

若 $(E, \mathcal{E})$ 为可测空间, 则 $m(\mathcal{E})$ (相应的, $b(\mathcal{E})$) 表示 $\mathcal{E}$-可测 (相应的, 有界 $\mathcal{E}$-可测) 实函数构成的空间. 我们只对分离拓扑空间 E 使用和测度相关的记号: $\mathcal{M}_b^+(E)$ 和 $\mathcal{M}^+(E)$ 分别表示 E 上的有限 Radon 测度以及任意 Radon 测度所构成的锥, 而 $\mathcal{M}_b(E)$ 和 $\mathcal{M}(E)$ 表示由上述锥所生成的向量空间.

---

[1] 也记作 $\mu(f)$, $\langle \mu, f \rangle$.

拓扑空间　7

若拓扑空间 E 包含一个可数稠密子集, 则称是 E 可分的. 如果在 E 上存在与拓扑相容的距离使得在此距离下 E 为完备可分空间, 那么称 E 为波兰空间. 具有可数基的局部紧空间简称为 LCD 空间.

我们将下 (上) 半连续简记为 s.c.i.(s.c.s.).

序数和超限归纳法　8

用超限归纳法处理问题极为直观简洁, 我们以后会多次使用. 考虑到并不是每位读者都熟悉超限归纳法, 这里我们给出说明.

设 $(J, \leqslant)$ 为一个以 ε 为最后元素的不可数良序[①]集合. 这样的集合 "存在": 任取一个不可数集, (由选择公理可知) 我们在其上可以建立一个良序. 必要时我们再加上 ε 即可. 对任意的 $\alpha \in J$, 令 C_α 为 J 中满足 $\beta < \alpha$ (即 $\beta \leqslant \alpha, \beta \neq \alpha$) 的 β 组成的集合.

由假设, 使得 C_α 为不可数集的 α 组成的集合包含 ε, 从而该集合非空且存在最小元 j_0. 令 $I = C_{j_0}$, 其中 I 上的序由 J 上的序诱导. 有序集 I 满足下列两条性质:

1) I 是良序集且不可数.

2) 对于任意的 $i \in I$, C_i 为可数集.

我们可以证明上述两条性质在同构的意义下刻画了有序集 I. 特别的, I 同构于所有可数序数组成的集合. 但是我们没有必要知道这些. 这样把 I 确定下来之后, 我们采用如下术语:

—— I 中的元素称为 (可数) 序数.

—— 给定 $\alpha \in I$, 我们容易看出 I 中满足 $\alpha < \beta$ 的 β 的全体组成的集合非空 (否则 I 为可数集!). 该集合中的最小元记为 $\alpha + 1$, 称为 α 的后继序数, α 为 $\alpha + 1$ 的前趋序数 (它作为 $\{\beta : \beta < \alpha + 1\}$ 中的最大元是唯一确定的).

—— I 中的最小元记为 0, 我们自然地记 0+1=1, 1+1=2, 2+1=3, $\cdots$, 如上构造的这些 "整数" 的最小上界通常记为 ω.

—— 形如 α+1 的序数通常称为第一类序数. 不存在前趋序数的非零序数称为第二类序数 (或极限序数).

我们将 I 的一系列并不是很显然的性质作为一个引理给出.

引理　a) *对于每个非零序数 $\alpha \in I$, 存在从 I 中的区间 $[0, \alpha]$ 到 $\mathbb{R}$ 上的严格递增映射 f, 使得 $f(0) = 0$, $f(\alpha) = 1$.*

---

①英译本注: 我们回忆一下, 一个全序集合是良序化的, 如果每一个非空子集都有一个最小元.

b) 反之, 对于从 I 到 $\mathbb{R}$ 或 $\overline{\mathbb{R}}$ 的任一递增映射 f, 存在序数 γ 使得对于所有的 $\beta \geqslant \gamma$, 有 $f(\beta) = f(\gamma)$.

c) 对于每个极限序数 α, 存在一列递增的序数 $\alpha_n < \alpha$ 使得 $\alpha = \sup_n \alpha_n$.

证 a) 设 A 为使得上述从 $[0,\beta]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 不存在的非零序数 β 所组成的集合. 如果 A 非空, 那么存在最小元 α. 显然 α 的前趋序数不存在, 并且 α 不为 0. 从而 α 为极限序数. 对于每个 $\beta < \alpha$, 设 f_β 为从 $[0,\beta]$ 到 $\mathbb{R}$ 且满足 $f_\beta(0) = 0$, $f_\beta(\beta) = 1$ 的严格递增映射, 设 g_β 为从 $[0,\alpha]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 在 $[0,\beta]$ 上等于 f_β, 在 $(\beta,\alpha]$ 上等于 1. 因为满足 $\beta < \alpha$ 的 β 仅有可数个, 所以存在严格正的 ε_β, 使得 $\sum_\beta \varepsilon_\beta = 1$. 于是 $[0,\alpha]$ 上的函数 $\sum_\beta \varepsilon_\beta g_\beta$ 满足引理所述, 这与 α 的定义矛盾. 因此 A 为空集.

b) 设 $A = \sup_\beta f(\beta)$. 对所有的 n, 取满足 $f(\alpha_n) > A - \dfrac{1}{n}$ 的 α_n (若 $A = +\infty$, 则考虑 $f(\alpha_n) > n$). 设 $\gamma = \sup_n \alpha_n$, 则对所有的 $\beta \geqslant \gamma$, 我们有 $f(\beta) = f(\gamma) = A$.

c) 最后, 设 α 是一个极限序数, f 为从 $[0,\alpha]$ 到 $\mathbb{R}$ 中有界区间上的严格递增映射. 令 $c = \sup_{\beta<\alpha} f(\beta)$, 我们只需取 α_n 为满足 $f(\beta) > c - \dfrac{1}{n}$ 的最小序数 β 即可. □

"超限归纳原理" 可以简单地叙述如下: 若 $P(\alpha)$ 为 "关于序数 α 的某个性质" (换句话说, A 为 I 中的一个子集, $P(\alpha)$ 对 α 成立当且仅当 $\alpha \in A$), 使得

1) 若 P 对 α 成立, 则 P 对 $\alpha + 1$ 亦成立.

2) 若 β 为极限序数并且 P 对每个序数 $\alpha < \beta$ 都成立, 则 P 对 β 成立.

3) P 对 0 成立.

则 P 对所有的 $\alpha \in I$ 成立. 这是显然的: 我们考虑使得 $P(\alpha)$ 不成立的所有 α 构成的集合. 如果该集合非空, 那么由 1), 集合中有起始元素并且它无前趋序数; 由 2), 它不是极限序数; 由 3), 它非零. 这是荒谬的. 从而该集合必为空集.

这一 "原理" 可以应用到任意良序集的情况, 而不仅限于 I.

利用超限归纳法, 我们可以递归构造函数 f, 所考虑的性质 $P(\alpha)$ 是 "存在唯一定义在区间 $[0,\alpha]$ 上满足某种性质的函数 f", 而结论为 "存在唯一一个定义在整个 I 上满足某种性质的函数 f"①.

9 最后来说两句 (狭义的) "连续统假设". 我们知道可以在集合论中加一条公理:

I 具有连续统势.

(换句话说, 我们可以通过 I 中的点来 "列举" $\mathbb{R}$ 中的点、整数序列、……) 连续统公理与通常的集合论公理独立. 到目前为止, 接受或排斥这一公理仅仅是个人喜好问题, 分析中并没有哪个真正有用的结果会要用到它. 我们将在后面看到几个连续统假设的漂亮推论 (归功于 Mokobodzki), 这使得我们像接受选择公理一样接受它.

①英译本注: 一般说来, f 满足的归纳条件保证我们在对于所有 $\beta < \alpha$ 都知道 $f(\beta)$ 的值的情况下能够确定 $f(\alpha)$.

第 I 章　可测空间

§1　σ-代数和随机变量

定义　给定集合 Ω, 如果 Ω 上的集类满足空集属于该集类且对于运算 $(\cup d, \cap d, {}^c)$ 封闭, 那么称该集类为 σ-域.　1

σ-代数常常作为 σ-域[①]的同义词来使用. 设 Ω 为一给定集合, $\mathcal{F}$ 为定义在 Ω 上的 σ-代数, 我们称二元组 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, $\mathcal{F}$ 中的元素称为可测集或 $\mathcal{F}$-可测集. 在概率论的语言中, 称它们为事件.

我们称集合 Ω 为 "必然事件", 空集为 "不可能事件"; 这样取一个集合的余集就是考虑 "对立事件". 有时我们会用诸如 "事件 A 发生"、"事件 A 和 B 同时发生"、"事件 A 和 B 不相容" 的句子来表示集合论中的下述关系式: "$\omega \in A$", "$\omega \in A \cap B$" 和 "$A \cap B = \varnothing$". 读者肯定会很快熟悉这种表述.

为了理解这种语言并且充分利用它来帮助我们直观理解, 我们可以将 Ω 中的点看成某种实验可能的结果, Ω 中的每个子集 A 对应一个 "事件", 当 ω"落入 A" 时, 某个物理现象便会发生. 在所有可能的 "事件" 中, σ-代数 $\mathcal{F}$ 包含那些充分简单的事件使得我们可以合理地定义这些事件发生的概率.

随机变量的定义

定义　设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(E, \mathcal{E})$ 为两个可测空间, f 为从 Ω 到 E 的映射, 如果　2

[①]所谓 Boole 代数是指 Ω 上包含 $\varnothing$ 且对于运算 $(\cup f, \cap f, {}^c)$ 封闭的集类.

译校者注: 按国内文献的习惯, 我们将 σ-域统称为 σ-代数.

$$\text{对所有的 } A \in \mathcal{E}, \text{ 有 } f^{-1}(A) \in \mathcal{F},$$

那么称 f 为可测映射.

在概率论的语言中, 我们称 f 为随机变量 (简记为 v.a.).

在可能引起歧义的情形下, 我们更确切地称 f 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机变量.

3 **例** 1) 设 E 为由 0 和 1 这两个数组成的集合, E 上的所有子集构成 σ-代数 $\mathcal{E}$. Ω 中的子集 A 为一个事件当且仅当它的特征函数 χ_A (在 A 上等于 1, 在 $\Omega \setminus A$ 上等于 0) 是一个随机变量. 概率论学者通常称这个函数为 A 的示性函数, 记为 I_A. 我们以后将使用这个记号.

2) 若 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数, 则从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega, \mathcal{G})$ 上的恒等映射是一个随机变量.

4 **定理** 设 $(\Omega, \mathcal{F})$, $(G, \mathcal{G})$ 和 $(E, \mathcal{E})$ 是三个可测空间, $u : \Omega \to G$, $v : G \to E$ 是两个随机变量, 则复合映射 $v \circ u$ 也是一个随机变量.

5 **定义** a) 设 Ω 为一个集合, $\mathcal{A}$ 为 Ω 中的一些子集构成的一个集类. Ω 上包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ-代数称为由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数, 记为 $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

b) 设 $(f_i)_{i \in I}$ 为从集合 Ω 到可测空间 $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ 的一族映射. Ω 上使得每个 f_i 都可测的最小 σ-代数称为 f_i 生成的 σ-代数, 记为 $\mathcal{T}(f_i, i \in I)$.

上述两个定义中最小 σ-代数的存在性是显然的: 只需取使所有集合或函数可测的 σ-代数 (在 $\mathcal{P}(\Omega)$[①] 中) 的交即可, 我们注意到至少存在一个 σ-代数满足上述要求, 即由 Ω 的所有子集构成的 σ-代数.

定义 5 中的 a) 和 b) 有着密切的联系: 由集合中的某些子集生成的 σ-代数等同于这些子集的示性函数所生成的 σ-代数; 而映射 f_i 生成的 σ-代数等同于形如 $f_i^{-1}(A_i)$ 的子集生成的 σ-代数, 其中对于所有的 i, A_i 属于 $\mathcal{E}_i$.

6 **注** a) 设 $(E, \mathcal{E})$ 是一个可测空间, f 是从 E 到 Ω 的一个映射; 则 f 关于 Ω 上的 σ-代数 $\mathcal{T}(\mathcal{A})$-可测 (定义 5. a)) 当且仅当对于任意的 $A \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ (Ω 中满足 $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$ 的子集 B 组成的集类为一个 σ-代数, 它包含 $\mathcal{A}$, 从而它也包含 $\mathcal{T}(\mathcal{A})$).

同样的, f 关于 Ω 上的 σ-代数 $\mathcal{T}(f_i, i \in I)$ 可测 (定义 5. b)), 当且仅当每个映射 $f_i \circ f$ 可测.

b) 由一族函数 $(f_i)_{i \in I}$ 生成的 σ-代数等同于所有 $\mathcal{T}(f_i, i \in J)$ (在 $\mathcal{P}(\Omega)$ 中) 的并, 其中 J 是 I 中的所有可数子集组成的集类.

[①] 译校者注: $\mathcal{P}(\Omega)$ 表示 Ω 上的幂集合, 即 Ω 中的所有子集组成的集类.

σ-代数的例子 7

a) 设 E 是一个拓扑空间, E 中所有开集生成的 σ-代数称为 E 上的 Borel σ-代数, 记作 $\mathcal{B}(E)$. 若 F 是 E 的一个子空间, 则 $\mathcal{B}(F)$ 中的元素为 $\mathcal{B}(E)$ 中的元素在 F 上的限制. 如果空间 E 具有可数基 $\mathcal{H}$, 那么每一个开集都可以表示为 $\mathcal{H}$ 中一列元素的并, 从而 $\mathcal{B}(E)$ 也可以由 $\mathcal{H}$ 生成. 例如, 实轴上的 Borel σ-代数可以由端点为有理数的开区间生成. 设 E 和 F 为两个拓扑空间, 若从 E 到 F 的映射作为从 $(E,\mathcal{B}(E))$ 到 $(F,\mathcal{B}(F))$ 的映射是可测的, 则称其为从 E 到 F 的 Borel 映射. 连续映射都是 Borel 映射.

当我们提及一个拓扑空间 E 为可测空间而不指明其上的 σ-代数时, 默认其上的 σ-代数为 $\mathcal{B}(E)$.

b) E 上的连续实值函数生成的 σ-代数称为 Baire σ-代数, 通常它比 $\mathcal{B}(E)$ 小. 当 E 为可度量化空间时, Baire σ-代数等于 $\mathcal{B}(E)$: 这是因为若 d 为 E 上的距离, F 为 E 中任意一个闭集, 则有 $F=\{x:f(x)=0\}$, 其中 f 为连续函数 $x\mapsto d(x,F)$.

c) $\mathbb{R}$ 中在 Lebesgue 意义下可测的所有子集构成的集类是一个比 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 更大的 σ-代数.

d) 由 $\mathbb{R}$ 中所有可数子集或余集为可数的子集组成的集类是一个 σ-代数 (由集合 $\{x\}$ 生成, 其中 $x\in\mathbb{R}$). 我们将在第 III 章看到该 σ-代数有一些 "病态" 特征 (第 III 章第 26 段).

乘积 σ-代数

定义 设 $(E_i,\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ 为一族可测空间, 我们用 E 表示乘积集 $\prod_{i\in I}E_i$, $X_i(i\in I)$ 表示坐标映射. $\mathcal{T}(X_i,i\in I)$ 称为 $\mathcal{E}_i$ 的乘积 σ-代数, 记为 $\prod_{i\in I}\mathcal{E}_i$. 8

两个 σ-代数的乘积 σ-代数记为 $\mathcal{E}_1\times\mathcal{E}_2$. 许多作者用 $\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2$, $\otimes_{i\in I}\mathcal{E}_i$ 来表示乘积 σ-代数.

注 a) 乘积 σ-代数也可以由 E 中形如 $\prod_{i\in I}A_i$ 的子集生成, 其中对于所有的 $i\in I$, $A_i\in\mathcal{E}_i$, 并且除去有限个指标外, $A_i=E_i$.

b) 给定集合 Ω, 设 $f_i(i\in I)$ 是从 Ω 到可测空间 $(E_i,\mathcal{E}_i)$ 的映射, f 是从 Ω 到乘积空间 $\prod_{i\in I}E_i=E$ 的映射 $(f_i)_{i\in I}$. 我们给出这一集合的乘积 σ-代数: $\mathcal{T}(f_i,i\in I)=\mathcal{T}(f)$. 使用同样的记号, 假设已经给定 Ω 上的 σ-代数 $\mathcal{F}$ 并且每一个从 Ω 到 E_i 的映射 f_i 都可测, 则从 Ω 到 E 的映射 f 亦可测.

c) 考虑 (有限或无限长的) 一列具有可数基 $\mathcal{L}_n$ 的拓扑空间 (特别的, 可度量化可分空间) (E_n), 则 $\mathcal{B}(\prod_n E_n)=\prod_n\mathcal{B}(E_n)$. 事实上, 我们可以假设对于所有的 n, $E_n\in\mathcal{L}_n$, 则形如 $\prod_n U_n$ 的集合可以构成 $\prod_n E_n$ 中拓扑的一个开集可数基, 其中 $U_n\in\mathcal{L}_n$, 并且除去有限个指标外, $U_n=E_n$, 从而 $\prod_n U_n$ 生成 $\mathcal{B}(\prod_n E_n)$. 另一方面, 它们生成 $\prod_n\mathcal{B}(E_n)$.

原子、可分 σ-代数

9 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, $\mathcal{F}$ 的原子为 Ω 中由如下关系决定的等价类:

$$(9.1) \qquad \text{对于所有的 } A \in \mathcal{F},\ I_A(\omega) = I_A(\omega').$$

Ω 上的每一个实值 (或更一般的, 值域为可度量化可分空间的) 可测映射是一列阶梯函数的极限 (第 17 段), 它在原子上为常数. 若 $\mathcal{F}$ 的每个原子都是 Ω 中的点, 则称可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为分离空间[①]. 如果 $(\Omega, \mathcal{F})$ 不是分离空间, 那么可以定义伴随分离空间 $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}})$: $\dot{\Omega}$ 为由 (9.1) 式决定的 Ω 的商空间, $\dot{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的元素在从 Ω 到 $\dot{\Omega}$ 的典则映射下的像所生成的 σ-代数.

10 若 $\mathcal{F}$ 可以由 $\mathcal{F}$ 中的一列元素生成[②], 则称可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 可分 (或单独称 $\mathcal{F}$ 可分) (作为拓扑空间, 一个空间可以是分离空间但是不可分!). 如果 σ-代数 $\mathcal{F}$ 可分且由 (A_n) 生成, 那么包含 $\omega \in \Omega$ 的 $\mathcal{F}$ 原子为所有包含 ω 的 A_n 或 A_n^c 的交, 从而原子是可测的. 最后, 显然我们有可分空间的伴随分离空间仍然可分.

11 两个可测空间称为是同构的, 如果它们之间存在一个双射, 并且该映射及其逆映射均可测 (这样的映射称为可测同构; 给定两个拓扑空间上的 Borel σ-代数时, 我们也将该可测同构称为 Borel 同构). 显然, 与可度量化可分空间 (给定其上的 Borel σ-代数) 同构的可测空间是一个可分的分离空间. 反之, 我们有

定理 设 $(E, \mathcal{E})$ 为可分且分离的可测空间, 则 $(E, \mathcal{E})$ 同构于 $\mathbb{R}$ 中某个带有 Borel 代数的子空间. 更确切的, 如果 (A_n) 为 E 中生成 $\mathcal{E}$ 的一列子集, 我们定义映射 f 如下[③]:

$$\text{对于所有的 } x \in E,\ f(x) = \sum_n 3^{-n} I_{A_n}(x),$$

那么 f 为 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(f(E), \mathcal{B}(f(E)))$ 上的可测同构.

证 显然 f 为从 E 到 $f(E)$ 上的可测双射. 为了证明它的逆映射仍然可测, 我们只需证明包含于 $\mathcal{E}$ 中的由 f 生成的 σ-代数等于 $\mathcal{E}$, 或者等价的, 只需证明它包含每个 A_n. 这由如下事实得证: 考虑区间 $[0,2]$ 中在三进制展开中第 n 项为 1 的 y 的全体构成的集合, 其在 f 下的逆像即为 A_n. □

下面我们证明, 在适当的可分性假设下, 一些常见的集合是可测的.

12 **定理** 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, $(E, \mathcal{E})$ 为可分且分离的可测空间.

---

①译校者注: 此处的法语表述是 "espace séparé", 在英语中没有标准的翻译, 因此英译本的表述是 "Hausdorff space".

②包含可数个集合且对于运算 $(\cup f, \cap f, {}^c)$ 封闭的最小集类仍然是可数的, 因此, 可分 σ-代数是由可数 Boole 代数生成的.

③映射 $\frac{2}{3}f$ 为取值于经典 Cantor 集中的映射, 有时称它为集列 (A_n) 的 "Marczewski 指标".

a) $E\times E$ 的对角线属于乘积 σ-代数 $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$.

b) 若 f 为从 Ω 到 E 的可测映射, 则 f 在 $\Omega\times E$ 中的图像属于乘积 σ-代数 $\mathcal{F}\times\mathcal{E}$.

c) 若 f 和 g 均为从 Ω 到 E 的可测映射, 则集合 $\{f=g\}$ 属于 $\mathcal{F}$.

证 设 $\mathcal{A}=(A_n)$ 为生成 $\mathcal{E}$ 的一个可数 Boole 代数, D 为使得 $A_m\cap A_n=\varnothing$ 的所有 $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 组成的集合. 因为 $\mathcal{E}$ 是分离空间, $E\times E$ 的对角线为 $A_m\times A_n$ 的并集的余集, 其中 (m,n) 取遍 D, 所以它属于 $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$. 结论 c) 源自如下事实: 集合 $\{f=g\}$ 为 $E\times E$ 的对角线在从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E\times E,\mathcal{E}\times\mathcal{E})$ 的可测映射 $\omega\mapsto(f(\omega),g(\omega))$ 下的原像. 由 c) 我们可以推出 b), 考虑 $(\Omega',\mathcal{F}')=(\Omega\times E,\mathcal{F}\times\mathcal{E})$ 和从 Ω' 到 E 的可测映射 $f':(\omega,x)\mapsto f(\omega)$, $g':(\omega,x)\mapsto x$, 则 f 的图像等于集合 $\{f'=g'\}$. □

事实上, 根据定理 11, 上述定理可以简化为 E 是可度量化可分空间并且 $\mathcal{E}=\mathcal{B}(E)$ 这样的经典特殊情形. 一般的, 只要可能, 我们将使用更灵活的拓扑学术语, 例如用 "设 E 是一个可度量化可分空间" 代替 "设 $(E,\mathcal{E})$ 是一个可分且分离的可测空间".

§2 数值随机变量

13 数值 (广义实值) 随机变量和实值随机变量的含义略有不同, 即它们的取值范围分别是 $\overline{\mathbb{R}}$ 和 $\mathbb{R}$. 我们采用 Bourbaki 的约定, "数值" 一词对应于 $\overline{\mathbb{R}}$, "实值" 一词对应于 $\mathbb{R}$. 在可能引起歧义的时候我们会详细说明.

阶梯随机变量通常指至多取可数个值的随机变量, 或者指仅取有限个值的随机变量. 在本书中, 阶梯随机变量可以取可数个值.

基本性质

我们假设在同一个可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上定义了函数 $f, g, \cdots$.

14 设 f 和 g 为两个数值随机变量, 则函数 $f\wedge g$, $f\vee g$, $f+g$, $f\cdot g$ (如果它们处处有定义的话) 均为随机变量①.

15 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列点点收敛的数值随机变量, 令 $f=\lim_n f_n$, 则函数 f 亦为随机变量.

我们可以将这一性质推广到取值于度量空间 E 的随机变量: 如果 d 为 E 上的距离并且 F 为 E 中的闭集, 那么集合 $\{f\in F\}$ 等同于集合 $\{x:d(f_n(x),F)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\}$.

16 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列数值随机变量, 则由 (f_n) 的收敛点组成的集合为可测集.

我们可以将这一性质推广到取值于 E 的随机变量, 其中 E 为完备度量空间 F 的子空间且 E 为 F 中的 Borel 集: Ω 中使得 $(f_n(\omega))$ 为 F 中的 Cauchy 列的 ω 组成的集合 A 属于 $\mathcal{F}$. 定义从 Ω 到 F 的映射 f 为: 当 $\omega\in A$ 时, $f(\omega)=\lim_n f_n(\omega)$;

①借此机会我们回顾一下在积分理论中通常约定 $0\cdot\infty=0/0=0$.

当 $\omega \notin A$ 时, $f(\omega) = x_0$, 其中 x_0 为 F 中的某一点, 则 f 可测. (f_n) 在 E 中的收敛点集为 $A \cap f^{-1}(E)$.

17 *数值函数 f 可测当且仅当存在一列可测阶梯函数 (f_n) 使得 f_n 递增收敛到 f.*

对于有限函数, 我们最常用的函数列由下式给出① (Lebesgue 逼近):

$$f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k 2^{-n} I_{\{k2^{-n} < f \leqslant (k+1)2^{-n}\}}.$$

我们可以看出这个函数列一致收敛到 f. 如果我们用 "一致收敛" 代替 "递增收敛", 那么本条性质可以推广到随机变量取值于带有 Borel 代数 (此处由开球生成) 的可分度量空间 E 的情形. 我们考虑 E 中的稠密子集 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 令 B_n 为以 x_n 为中心, 半径为 ε 的开球, C_n 为集合 $B_n \setminus (\cup_{p<n} B_p)$, 则 C_n 为一族两两不交的 Borel 集并且它们覆盖 E. 若 g 是在 $f^{-1}(C_n)$ 上取值为 x_n 的阶梯函数, 则 g 可测并且它与 f 的距离小于 ε.

18 下面的定理取自 Doob [1] (第 603 页). 它表明 $\mathcal{T}(f)$-可测数值随机变量这一概念可以替换为不那么抽象的概念: "f 在可测函数下的值". 根据第 16 和 17 段, 该定理很容易推广到 g 为取值于完备可分度量②空间的函数的情形, 详细证明我们留给读者.

定理 *设 f 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上取值于可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的随机变量, g 为定义在 Ω 上的数值函数, 则 g 为 $\mathcal{T}(f)$-可测函数当且仅当存在 E 上的数值随机变量 h, 使得 $g = h \circ f$.*

证 充分性显然成立. 为证明必要性, 首先我们假设 g 仅取可数个值 $a_n (n \in \mathbb{N})$. 由于集合 $A_n = \{g = a_n\}$ 是 $\mathcal{T}(f)$-可测的, 从而它具有形式 $f^{-1}(B_n)$, 其中 B_n 属于 $\mathcal{E}$. 令 $C_n = B_n \setminus (\cup_{p<n} B_p)$, 则 C_n 属于 $\mathcal{E}$ 并且它们两两不交. 另一方面, 我们有

$$f^{-1}(C_n) = A_n \setminus (\bigcup_{p<n} A_p) = A_n.$$

设 h 为 E 上的函数, 它在 C_n 上等于 a_n, 在 $E \setminus (\cup_n C_n)$ 上等于 (比如说) 0, 则显然有 $h \circ f = g$. 我们考虑一般的情形, 由第 17 段, 存在一列阶梯随机变量 g_n 收敛到 g. 我们在前面已经证明了每一个 g_n 都具有形式 $h_n \circ f$. 令 H 为 (h_n) 的收敛点组成的集合, 则 H 为 $\mathcal{E}$-可测集并且它包含 $f(\Omega)$. 我们令

$$h(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_n h_n(\omega), & \text{当 } \omega \in H \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } \omega \in H^c \text{ 时}, \end{cases}$$

即为所求. □

①若 f 非负, 则令 $f_n = 2^{-n} \sum_{k>0} I_{\{f > k2^{-n}\}}$.

②译校者注: 此处 "度量" 一词在英文版中改为 "可测".

“单调类定理”

定理 19 和 21 在后面一直要用到[①].

定理 设 $\mathcal{C}$ 为 Ω 上包含 $\varnothing$ 且对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭的集类. 设 $\mathcal{M}$ 为 Ω 上包含 $\mathcal{C}$ 且对于运算 $(\cup md, \cap md)$ 封闭的集类 ($\mathcal{M}$ 称为“单调类”), $\mathcal{S}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 且对于运算 $(\cup d, \cap d)$ 封闭的最小集类, 则 $\mathcal{M}$ 包含 $\mathcal{S}$. ⑲

进一步, 若 $\mathcal{C}$ 对于运算 $\complement$ 封闭, 则 $\mathcal{M}$ 包含由 $\mathcal{C}$ 生成的 σ-代数.

证 为简单起见, 我们称对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭的集类为族. 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{M}$ 中包含 $\mathcal{C}$ 的一个极大族 (Zorn 引理), 我们证明 $\mathcal{H}$ 对于运算 $(\cup d, \cap d)$ 封闭. 设 (A_n) 为 $\mathcal{H}$ 中的一个单调下降序列[②]并且令 $A = \cap A_n$; 所有形如 $(H \cap A) \cup H'$ (其中 $H \in \mathcal{H} \cup \{\Omega\}$, $H' \in \mathcal{H}$) 的子集组成的集类包含 $\mathcal{H}$ (令 $H = \varnothing$) 和 A (令 $H = \Omega, H' = \varnothing$), 并且它为 $\mathcal{M}$ 中的族. 因为 $\mathcal{H}$ 为极大族, 从而上述构造的族等于 $\mathcal{H}$, 于是 $A \in \mathcal{H}$. 换句话说, $\mathcal{H}$ 对于运算 $(\cap d)$ 封闭, 所以包含 $\mathcal{C}$ 且对于运算 $(\cap d)$ 封闭的最小集类包含在 $\mathcal{M}$ 中. 同理可证 $(\cup d)$ 的情形.

设 $\mathcal{T}$ 为满足 $A \in \mathcal{S}$ 和 $A^c \in \mathcal{S}$ 的集合 A 的全体; 如果 $\mathcal{C}$ 中每一元素的余集仍然属于 $\mathcal{C}$ (或者更一般地考虑 $\mathcal{S}$), 那么 $\mathcal{T}$ 包含 $\mathcal{C}$. 特别的, $\varnothing \in \mathcal{T}$. 显然 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{M}$ 中的 σ-代数, 从而定理的最后一部分得证. □

下面的例子 (这其实是第 II 章开头的内容) 给出定理 19 的一个应用.

定理 设 $\mathcal{F}_0$ 为 Ω 上对于运算 $(\cup f, {}^c)$ 封闭的一个集类[③]; 记 $\mathcal{T}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$. 设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}'$ 为 $\mathcal{F}$ 上的两个概率测度, 满足对于所有的 $A \in \mathcal{F}_0$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'(A)$, 则 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}'$ 在 $\mathcal{F}$ 上相等. 20

证 令 $\mathcal{C} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{F}$ 中使得 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}'(A)$ 的元素 A 组成的集合, 应用定理 19 即可得证. □

下面我们给出函数形式的单调类定理. 首先给出最常用的形式, 然后再给出它的一些变体.

定理 设 $\mathcal{H}$ 为 Ω 上的有界实值函数构成的向量空间, 包含全体常数函数, 并且在一致收敛下封闭, 还满足如下性质: 对任意非负一致有界的递增函数列 $f_n \in \mathcal{H}$, 函数 $f = \lim_n f_n$ 属于 $\mathcal{H}$. ㉑

设 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{H}$ 中对于乘积运算封闭的子集, $\mathcal{F}$ 为由 $\mathcal{C}$ 中的元素所生成的 σ-代数, 则 $\mathcal{H}$ 包含所有 $\mathcal{F}$-可测的有界函数.

证 设 $\mathcal{C}'$ 为由函数 1 和 $\mathcal{C}$ 中的元素生成的代数; 显然 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{H}$. 由 Zorn 引理,

①关于不用 Zorn 引理的证明, 参见 Chung [1], 第 17 页.

②由于 $\mathcal{H}$ 为族, 我们只需考虑单调下降序列即可.

③即 $\mathcal{F}_0$ 为一个 Boole 代数 (第 1 段).

我们可以从满足 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ 的代数 $\mathcal{A}$ 组成的集合中选取极大元 $\mathcal{A}_0$. 我们知道, 在 $\mathbb{R}$ 中每个紧区间上, 函数 $x \mapsto |x|$ 可以由多项式一致逼近[①]; 显然代数 $\mathcal{A}_0$ 在一致收敛下封闭并且包含常数函数, 因此它对于运算 $f \mapsto |f|$ 封闭, 从而也对于运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 封闭. 设 g 为 $\mathcal{A}_0$ 中一个非负一致有界递增序列的极限, 容易验证 $\mathcal{A}_0$ 和 g 生成的代数包含在 $\mathcal{H}$ 中, 从而 $\mathcal{A}_0$ 和 g 生成的代数等于 $\mathcal{A}_0$. 因此, $g \in \mathcal{A}_0$.

设 $\mathcal{S}$ 为 Ω 中示性函数属于 $\mathcal{A}_0$ 的所有子集组成的集合; 因为 $\mathcal{A}_0$ 是一个代数, 从而 $\mathcal{S}$ 在运算 $(\cap f,\ ^c)$ 下封闭. 由 $\mathcal{A}_0$ 在单调收敛下封闭可以推出 $\mathcal{S}$ 是一个 σ-代数, 且由第 17 段, $\mathcal{A}_0$ 包含所有 $\mathcal{S}$-可测的有界函数. 现在只余下证明 $\mathcal{S}$ 包含 $\mathcal{T}$; 显然只需证明对每个函数 $f \in \mathcal{A}_0$, $\mathcal{S}$ 包含集合 $B = \{\omega : f(\omega) \geqslant 1\}$. 由于函数 $g = (f \wedge 1)^+$ 属于 $\mathcal{A}_0$, 并且 B 的示性函数为递减序列 g^n 的极限, 定理得证[②]. □

22 **定理 21 的变体**

"单调类定理" 是概率论中的一个基本定理. 要理解它的各种变体有什么意思, 我们要看这个定理是怎么用的: 我们想要证明某个性质 $\mathcal{P}$ 对所有关于某个 σ-代数 $\mathcal{T}$ 可测的有界函数成立. 我们知道如何验证 $\mathcal{P}$ 对某个函数类 $\mathcal{C}$ 成立, 而 $\mathcal{C}$ 可以生成 $\mathcal{T}$. 我们可以令 $\mathcal{H}$ 为所有满足性质 $\mathcal{P}$ 的有界 $\mathcal{T}$-可测函数组成的集合. 利用单调类定理我们可以证明 $\mathcal{H}$ 包含所有有界 $\mathcal{T}$-可测函数.

我们给出的定理适用于线性性质: 若性质 $\mathcal{P}$ 对于两个函数 f, g 成立, 则 $\mathcal{P}$ 对于 $af + bg$ 仍成立. 这种情形下, 对 $\mathcal{C}$ 只需作很少的假设. 重述假设:

(22.1)
a) $\mathcal{H}$ 为有界函数所组成的向量空间, 在有界单调收敛和一致收敛下封闭, 并且包含 1;
b) $\mathcal{C}$ 对于乘积运算封闭.

若定理满足如下假设, 则用同样的证明方法可以得到相同的结论.

(22.2)
a) $\mathcal{H}$ 为有界函数组成的集合, 在有界单调收敛和一致收敛下封闭;
b) $\mathcal{C}$ 为一个代数, 并且 $1 \in \mathcal{C}$.

(事实上, 条件 $1 \in \mathcal{C}$ 可以弱化, 例如假设存在 $f_n \in \mathcal{C}$ 使得 f_n 一致[③]收敛到 1.)

一致收敛的条件仅在证明由乘积运算封闭推出对于运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 封闭时用到, 从而我们可以给出一个不需要一致收敛的定理的变体.

(22.3)
a) $\mathcal{H}$ 为对于有界单调收敛封闭的集合;
b) $\mathcal{C}$ 为对于运算 $\wedge$ 封闭的向量空间, 并且 $1 \in \mathcal{C}$.

---

①$(1-z)^{\frac{1}{2}}$ 的 Taylor 级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛, 从而函数 $|x| = [1-(1-x^2)]^{\frac{1}{2}}$ 可以由 $[-1,1]$ 上的多项式一致逼近 (令 $z = 1 - x^2$).

②法文版第 III 卷补注: B. Atkinson 指出, 没有必要假设 $\mathcal{H}$ 在一致收敛下封闭. 事实上, 注意到 $1-(1-z)^{\frac{1}{2}}$ 的 Taylor 展开是正系数的, 从而在 $[-1,1]$ 上, $|x|$ 是 x 的多项式的单调极限, 从而 $\mathcal{H}$ 对于 $\wedge$ 运算是封闭的.

③译校者注: 原文为 "递增", 根据严加安先生的意见改为 "一致".

这里我们必须将证明稍加改变，用包含 $\mathcal{C}$ 且对于运算 $\wedge$ 封闭的向量空间代替包含 $\mathcal{C}$ 的代数 $\mathcal{A}$. 如果 $\mathcal{A}_0$ 为 $\mathcal{H}$ 中满足上述条件的一个极大空间，那么 $\mathcal{A}_0$ 对于单调收敛封闭. 最后，我们需要证明若 $g \in \mathcal{A}_0$ 是非负的，则 $g^n \in \mathcal{A}_0$: 这是容易验证的，因为凸函数 $x \mapsto x^n$ 为一列线性函数的上包络.

类似定理 19, 我们通过几个在第 II 章的研究对象上的应用来展示定理的威力.

定理 23 *设 E 是一个度量空间，其上有 Borel σ-代数.*

a) 设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}'$ 为两个概率测度，满足对于每一个有界连续函数 f, $\int f\mathbb{P} = \int f\mathbb{P}'$, 则 $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$.

b) 对于每一个有界 Borel 函数 f 和任意的 $\varepsilon > 0$, 存在有界上半连续函数 f' 和有界下半连续函数 f'', 使得 $f' \leqslant f \leqslant f''$ 且 $\int (f'' - f')\mathbb{P} < \varepsilon$.

证 对于 a), 我们应用定理 21, 其中 $\mathcal{C}$ 取成有界连续函数组成的代数，$\mathcal{H}$ 取成满足 $\int f\mathbb{P} = \int f\mathbb{P}'$ 的有界 Borel 函数 f 组成的集合. 我们知道 $\mathcal{C}_b(E)$ 生成 $\mathcal{B}(E)$ (参见第 15 段).

从 $E = \mathbb{R}^n$, 且把 $\mathcal{C}_b(E)$ 换成无穷次可微有界函数这个特殊情形，我们可以知道，在这里最合适的性质是 "在乘法下封闭". 我们留给读者来证明对于具有紧支集的无穷次可微函数，不管是对于两个概率测度 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}'$, 还是更一般的对于 $\mathbb{R}^n$ 上的两个局部有限测度 μ 和 μ', 同样的结论仍成立.

对于 b), 我们设 $\mathcal{C}$ 为有界连续函数组成的集合，$\mathcal{H}$ 为满足定理中所述逼近性质的有界 Borel 函数组成的集合. 应用定理在 (22.3) 中的形式，这样可以避免使用一致收敛性. 为证明 $\mathcal{H}$ 在有界单调收敛下封闭，我们考虑 $\mathcal{H}$ 中的一致有界单增函数列 f_n 和相应的上半连续函数 f'_n, 下半连续函数 f''_n, 满足 $f'_n \leqslant f_n \leqslant f''_n$ 且 $\int (f''_n - f'_n)\mathbb{P} < \varepsilon 2^{-n-2}$. 记 $f = \lim_n f_n$, $f'' = \sup_n f''$, $f'_1 = \sup_n f'_n$, 我们可以验证 $f'_1 \leqslant f \leqslant f''$, $\int (f'' - f'_1)\mathbb{P} < \varepsilon/2$. 函数 f'' 上半连续，但是函数 f'_1 未必下半连续. 我们只需令 $f' = \sup_{n \leqslant N} f'_n$, 其中 N 取得充分大，使得 $\int (f'_1 - f')\mathbb{P} < \varepsilon/2$. □

下面为定理 21 的另外一个应用，这一结果在 Markov 过程中会用到.

定理 24 *设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间，X 和 Y 为取值于可度量化可分空间 E 的两个随机变量. 为证明 $X = Y$, $\mathbb{P}$-p.s., 我们只需证明对于 E 上的每一对有界连续函数 (f, g), 有*

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)g(X)]. \tag{24.1}$$

证 设 $\mathcal{H}$ 为 $E \times E$ 上满足 $\mathbb{E}[h(X,X)] = \mathbb{E}[h(X,Y)]$ 的有界 Borel 函数 $h(x,y)$ 组成的集合: 这是一个对于有界单调收敛和一致收敛封闭的向量空间. 设 $\mathcal{C}$ 为所有形如 $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ 的函数[①]组成的集合 (对于乘积运算封闭), 其中 f 和 g 为 E 上

[①] 函数 $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ 通常记为 $f \otimes g$.

的有界连续函数. (24.1) 式说明 $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$, 而且我们知道 $\mathcal{C}$ 生成 σ-代数 $\mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(E \times E)$, 由定理 21, $\mathcal{H}$ 包含所有的有界 Borel 函数. 我们取 $h(x, y)$ 为对角线的余集的示性函数即得. □

第 II 章　概率和数学期望

正如前言中所述, 我们假定读者熟悉测度论中最经典的部分. 所以, 本章的前一部分是一个简单综述, 目的是给出概率论中的基本术语. 从关于一致可积性的那一段开始我们重新给出完整的证明.

§1　积分理论概述

定义　*设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间. 这个可测空间上的一个概率测度 $\mathbb{P}$ 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的非负且全空间测度为 1 的抽象测度.* 1

三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 称为概率空间.

换句话说, $\mathbb{P}$ 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的满足 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ 的非负函数, 并且它还满足如下性质 ("可数可加性"): 对于任意一列两两互不相交的事件 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 有 $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$. 2

数 $\mathbb{P}(A)$ 称为事件 A 的概率. 概率为 1 的事件称为几乎必然事件. 设 f 和 g 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上取值于同一个可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 的两个随机变量, 如果集合 $\{\omega : f(\omega) = g(\omega)\}$ 为一个事件[①], 且概率为 1, 那么我们记

$$f = g \quad \text{p.s.},$$

其中 "p.s." 为 "几乎必然" 的缩写. 同样的, 我们记 "$A = B$ p.s." 表示两个事件 A 和 B 仅在一个概率为 0 的集合上不同. 更一般的, 我们使用 "几乎必然" 一词和测

[①] 当 $(E, \mathcal{E})$ 为可分的分离空间 (第 I 章定理 12) 时即是如此.

度论中使用“几乎处处”的意义完全一致. 事实上, 概率论学者很乐意使用测度论术语来避免重复从而使得他们的书更具可读性.

3 如果 Ω 中任何 $\mathbb{P}$ 零测集中的任一子集 A 均属于 σ-代数 $\mathcal{F}$ (这时必然有 $\mathbb{P}(A) = 0$), 那么我们称 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为完备概率空间. 我们将在第 32 段中回到这一概念, 在那里我们将证明任意概率空间均可以完备化.

4 **例** a) 设 I 为区间 $[0, 1]$. 对于任意的 $A \in \mathcal{B}(I)$, 定义:

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \mathrm{d}x \quad \text{(Lebesgue 测度)},$$

则 $\mathbb{P}$ 为 I 上的概率测度, 但是 $\mathbb{P}$ 不完备; 如果它扩张定义在由 Lebesgue 可测集所构成的 σ-代数上, 那么它就成为完备的了.

b) 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, x 为 Ω 中一点. 记 ε_x 为如下定义的概率测度:

$$\varepsilon_x(A) = I_A(x) \quad (A \in \mathcal{F}),$$

该测度称为在 x 处的退化测度或 x 处的单位质量. 更一般的, 如果定义在可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的测度 $\mathbb{P}$ 满足对所有的 $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1, 那么称 $\mathbb{P}$ 为退化测度. 此时, 每一个实值随机变量几乎必然等于常数.

数学期望

5 **定义** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间, f 为一个可积数值随机变量. 我们称积分 $\int_\Omega f(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$ 为随机变量 f 的数学期望, 记为 $\mathbb{E}[f]$.

以后我们将省略“数学”两字, 简称为期望.

我们只给出积分理论的很少一些细节. 下面仅给出两个最常用的定理以及一些注记.

⑥ **Lebesgue (控制收敛) 定理** 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列几乎必然收敛[①]的数值随机变量, f 为与 $\lim_n f_n$ 几乎必然相等的随机变量. 若 f_n 的绝对值被某一个可积函数所控制, 则 f 可积并且

$$\mathbb{E}[f] = \lim_n \mathbb{E}[f_n].$$

对于不可积的非负随机变量 f, 无论它是否有限, 为方便起见, 记 $\mathbb{E}[f] = +\infty$. 则我们有如下定理:

⑦ **Fatou 引理** 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列非负随机变量, 则

$$\mathbb{E}[\liminf_n f_n] \leqslant \liminf_n E[f_n].$$

[①] 或者仅为依概率收敛 (参见第 10 段).

当序列递增时, 无论积分是否有限, 上述不等式会变为等式. 这个结果即为 Lebesgue (单调收敛) 定理.

沿用 Bourbaki 的记号, 我们记 $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ (或更简洁的, $\mathcal{L}^p$) 为 p 次幂可积 $(1 \leqslant p < +\infty)$ 的数值随机变量所构成的向量空间. L^p 为以几乎必然相等为等价关系所作的 $\mathcal{L}^p$ 的商空间. 对于任一实值可测函数 f, 记 8

$$||f||_p = (\mathbb{E}[|f|^p])^{\frac{1}{p}} \quad (\text{可能为} + \infty).$$

同样, 记 $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ 为有界随机变量构成的具有一致收敛范数的空间 (与 $\mathbb{P}$ 无关). $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为以同样的等价关系所作的 $\mathcal{L}^\infty$ 的商空间. L^∞ 中的元素 f 的范数 ($|f|$ 的本质上确界) 记为 $||f||_\infty$.

我们不加证明地使用空间 L^p 的下列性质: L^p 为 Banach 空间 (例如参见 Dunford-Schwartz [1], 第 146 页); Hölder 不等式成立 (同一文献, 第 119 页); L^1 的对偶空间为 L^∞ (同一文献, 第 289 页). 另一个重要结果为 Radon-Nikodym 定理 (同一文献, 第 176 页), 它将在第 VIII 章作为鞅论的一个应用给出.

这里有两个有用的注记. 9

a) 设 f 为关于 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数 $\mathcal{G}$ 可测的可积随机变量, 则 f 几乎必然非负当且仅当

$$\text{对于所有的} A \in \mathcal{G}, \int_A f(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \geqslant 0.$$

(取 A 为事件 $\{f < 0\}$ 即得.)

特别的, 若两个可积随机变量 f 和 g 关于 $\mathcal{G}$ 均可测, 并且它们在 $\mathcal{G}$ 中每个集合上的积分均相等, 则 f 和 g 几乎必然相等.

b) 设 f 和 g 为两个可积随机变量, 如果它们的乘积 $f \cdot g$ 可积且期望为零, 那么称 f 和 g 正交. 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数, U 为 L^1 中所有 $\mathcal{G}$-可测随机变量组成的闭子空间, V 为 L^∞ 中与 U 中的每个元素都正交的有界随机变量构成的子空间. 由 Hahn-Banach 定理, 与 V 中所有元素都正交的随机变量 $f \in \mathcal{L}^1$ 几乎必然等于一个 $\mathcal{G}$-可测函数.

随机变量的收敛

首先我们回忆一下实值随机变量①序列各种收敛性的定义. 10

设 (f_n) 为一列定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量, 我们称序列 (f_n) 到随机变量 f 的收敛是

- 几乎必然收敛, 如果 $\mathbb{P}\{\omega : f_n(\omega) \to f(\omega)\} = 1$.
- 依概率收敛, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, $\lim_n \mathbb{P}\{\omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\} = 0$.

①或者几乎必然有限的数值随机变量. 对于不是几乎必然有限的随机变量, 依概率收敛的定义要稍作修正.

- L^p 强收敛, 如果 f_n 属于 $\mathcal{L}^p$ 并且 $\lim_n \mathbb{E}[|f_n - f|^p] = 0$.
- L^1 弱收敛 (或在拓扑 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 下收敛), 如果 f_n 和 f 属于 $\mathcal{L}^1$, 并且对每个随机变量 $g \in \mathcal{L}^\infty$, $\lim_n \mathbb{E}[f_n \cdot g] = \mathbb{E}[f \cdot g]$.
- L^2 弱收敛 (或在拓扑 $\sigma(L^2, L^2)$ 下收敛), 如果 f_n 和 f 属于 $\mathcal{L}^2$, 并且对每个随机变量 $g \in \mathcal{L}^2$, $\lim_n \mathbb{E}[f_n \cdot g] = \mathbb{E}[f \cdot g]$.

我们将在 L^1 弱收敛意义下讨论一致可积性. 此时我们回忆一下: 由几乎必然收敛或 L^p 强收敛可以推出依概率收敛, 任一依概率收敛的随机变量序列存在几乎必然收敛的子列. 更确切的, 对于每个实值随机变量 f, 设

$$\pi[f] = \mathbb{E}[|f| \wedge 1],$$

则函数 $(f,g) \mapsto \pi[f-g]$ 是一个可以定义依概率收敛的伪度量; 如果 (f_n) 满足性质:

$$\sum_n \pi[f_n - f_{n+1}] < +\infty,$$

那么 (f_n) 依概率收敛且几乎必然收敛 (参见 Dunford 和 Schwartz [1], 第 150 页).

像测度

11　**定义**　设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, $(E, \mathcal{E})$ 为可测空间, f 为在 E 中取值的 Ω 上的随机变量. 所谓 $\mathbb{P}$ 在 f 下的像测度, 记为 $f(\mathbb{P})$, 是定义在 $(E, \mathcal{E})$ 上的概率测度 $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(f^{-1}(A)) \quad (A \in \mathcal{E}).$$

这一测度也称为 f 的像测度或 f 的分布.

设 g 为从 $(E, \mathcal{E})$ 到可测空间 $(G, \mathcal{G})$ 的一个可测映射, 显然有如下等式 (像测度的传递性) 成立:

$$g(f(\mathbb{P})) = (g \circ f)(\mathbb{P}).$$

⑫　**定理**　设 h 为定义在 $(E, \mathcal{E})$ 上的数值随机变量; h 为 $\mathbb{Q}$-可积函数当且仅当 $h \circ f$ 是 $\mathbb{P}$-可积的, 此时,

$$\int_E h(x)\mathbb{Q}(\mathrm{d}x) = \int_\Omega h \circ f(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

概率测度的积分、Fubini 定理

13　**定义**　设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和 $(E, \mathcal{E})$ 为两个可测空间. $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一族概率测度. 若对所有的 $A \in \mathcal{F}$, $x \mapsto \mathbb{P}_x(A)$ 是 $\mathcal{E}$-可测的, 则称 $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$ 是 $\mathcal{E}$-可测的.

给定这样的一族 $(\mathbb{P}_x)_{x \in E}$, 我们有如下定理:

⑭　**Fubini 定理**　设 $\mathbb{Q}$ 为 $(E, \mathcal{E})$ 上的一个概率测度, 我们将可测空间 $(E \times \Omega, \mathcal{E} \times \mathcal{F})$ 记作 $(U, \mathcal{U})$.

1) 设 f 为定义在 $(U,\mathcal{U})$ 上的数值随机变量, 则映射 $x \mapsto f(x,\omega)$ 和 $\omega \mapsto f(x,\omega)$ 都在相应的空间上可测.

2) 存在 $(U,\mathcal{U})$ 上唯一的概率测度 $\mathbb{S}$, 使得对于所有的 $A \in \mathcal{E}$ 和 $B \in \mathcal{F}$, 有

(14.1)
$$\mathbb{S}(A \times B) = \int_A \mathbb{P}_x(B)\mathbb{Q}(\mathrm{d}x).$$

3) 设 f 为 $(U,\mathcal{U})$ 上的非负随机变量①, 则函数

$$x \mapsto \int_\Omega f(x,\omega)\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega)$$

是 $\mathcal{E}$-可测的, 并且

(14.2)
$$\int_U f(x,\omega)\mathbb{S}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}\omega) = \int_E \mathbb{Q}(\mathrm{d}x)\int_\Omega f(x,\omega)\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega).$$

当 f 为 $\mathbb{S}$-可积时, 上述等式仍成立, 但是我们只能得出对 $\mathbb{Q}$ 下几乎所有的 $x \in E$, $\omega \mapsto f(x,\omega)$ 是 $\mathbb{P}_x$-可积的.

注 a) 如果 f 既不非负也不是 $\mathbb{S}$-可积的, 那么等式 (14.2) 的左边无意义而右边仍是有意义的.

b) 若所有的 $\mathbb{P}_x$ 与某个 $\mathbb{P}$ 相同, 则称 $\mathbb{S}$ 为 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{P}$ 的乘积测度, 记作 $\mathbb{Q}\otimes\mathbb{P}$. 一般而言, 概率空间 $(U,\mathcal{U},\mathbb{Q}\otimes\mathbb{P})$ 并不完备. 通常我们只对乘积测度陈述 Fubini 定理, 它具有如下形式: 假设每个子空间完备, 并且 f 在做了完备化之后的乘积空间上可测; 结论 1) 不再成立, 但是对于 $\mathbb{Q}$ 下几乎所有的 $x \in E$ (相应的, $\mathbb{P}$ 下几乎所有的 $\omega \in \Omega$), 映射 $x \mapsto f(x,\omega)$ (相应的, $\omega \mapsto f(x,\omega)$) 是 $\mathcal{E}$-可测 (相应的, $\mathcal{F}$-可测) 的.

c) 有限个概率测度的乘积空间的定义是显然的. 我们不讨论无穷维乘积空间, 它将是第 Ⅲ 章中处理的概率测度投射极限理论的例子.

定义 沿用定理 14 中的记号, 概率测度族 $\mathbb{P}_x$ 关于 $\mathbb{Q}$ 的积分定义成 $\mathbb{S}$ 在从 $E\times\Omega$ 到 Ω 的投影映射下的像, 记为 $\int_E \mathbb{P}_x\mathbb{Q}(\mathrm{d}x)$. 15

结合定理 12 和 14, 我们得到下面的定理.

定理 记 $\mathbb{P}$ 为概率测度 $\int_E \mathbb{P}_x\mathbb{Q}(\mathrm{d}x)$, f 为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的非负随机变量, 则函数 $x \mapsto \int_\Omega f(\omega)\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega)$ 是 $\mathcal{E}$-可测的, 并且 (16)

$$\int_\Omega f(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_E \mathbb{Q}(\mathrm{d}x)\int_\Omega f(\omega)\mathbb{P}_x(\mathrm{d}\omega).$$

对于任意 $\mathbb{P}$-可积的随机变量 f, 上述等式仍成立. 此时, 对 $\mathbb{Q}$ 下几乎所有的 $x \in E$, f 是 $\mathbb{P}_x$-可积的.

①回忆一下, 对于所有非负可测函数均可以定义积分 (参见第 6 段).

§2 积分理论的补充

一致可积随机变量

下文中所涉及的随机变量均为定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$①上的实值随机变量.

17 **定义** 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 的子集. 如果当正数 c 趋于无穷时, 积分

$$\int_{\{|f|\geqslant c\}} |f(\omega)|\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \quad (f \in \mathcal{H}) \tag{17.1}$$

一致趋于 0, 那么我们称 $\mathcal{H}$ 是一个一致可积集.

记号 设 f 是一个随机变量. 记 f^c 为下述函数

$$f^c(\omega) = \begin{cases} f(\omega), & \text{当 } |f(\omega)| \leqslant c \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } |f(\omega)| > c \text{ 时}. \end{cases}$$

记 $f_c = f - f^c$. 定义 17 可以表述为: $\mathcal{H}$ 一致可积当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在常数 c, 使得对于所有的 $f \in \mathcal{H}$, $\|f_c\|_1 < \varepsilon$.

18 **注** a) 绝对值被某一个可积函数控制的随机变量族 (特别的, $\mathcal{L}^1$ 中的任意有限子集) 是一致可积的.

b) 几乎处处相等的随机变量在定义 17 中不加区分②. 注意到定义 17 中仅涉及随机变量的绝对值, 从而我们只需考虑非负随机变量.

c) 对于熟悉弱收敛的读者, 定义 17 可以用另一种方式叙述: 如果 $\mathcal{H}$ 中元素的分布满足 Prokhorov 条件 (即存在同一个紧区间 $[-c, c]$, 使得对于 $\mathcal{H}$ 中任意元素的分布 μ, 测度 $x\mu(\mathrm{d}x)$ 在该区间外的积分都小于等于 ε③), 那么 $\mathcal{H}$ 一致可积.

19 **定理** 设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{L}^1$ 中的子集. $\mathcal{H}$ 为一致可积的充分必要条件为

a) $\mathbb{E}[|f|] (f \in \mathcal{H})$ 是一致有界的④.

b) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任何满足 $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$ 的 $A \in \mathcal{F}$, 有

$$\int_A |f(\omega)|\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \leqslant \varepsilon \quad (f \in \mathcal{H}). \tag{19.1}$$

证 为证明条件 a) 和 b) 的必要性, 我们注意到, 对任意一个可积函数 f 和任意一个集合 $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A |f(\omega)|\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \leqslant c\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[|f_c|]. \tag{19.2}$$

①对于非有限测度的情形, 读者可以参考 Dunford-Schwartz [1].

②我们可以称之为 L^1 中的一致可积子集.

③译校者注: 这一条原文有误, 参照法文版第 II 卷勘误表修改. 英译本中这一条被删去.

④我们可以证明当测度 $\mathbb{P}$ 为扩散测度 (即没有原子部分) 时, b) 可以推出 a).

假设 $\mathcal{H}$ 是一致可积的, 我们可以取充分大的 c, 使得

$$\mathbb{E}[|f_c|] < \varepsilon/2 \quad (f \in \mathcal{H}).$$

令 $A = \Omega$, 即得 a). 取 $\delta = \varepsilon/2c$, 可以证明 b) 成立.

反之, 假设 a) 和 b) 成立, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 取满足条件 b) 的 $\delta > 0$, 并且令 $c = \sup_{f \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[|f|]/\delta$, 由 a) 可知 c 是有限的. 在 (19.1) 中令 $A = \{|f| \geqslant c\}$, 由不等式

$$\mathbb{P}\{|f| \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c}\mathbb{E}[|f|],$$

可知 $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$, 我们得到

$$\int_{\{|f| \geqslant c\}} |f(\omega)| \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \leqslant \varepsilon \quad (f \in \mathcal{H}),$$

从而 $\mathcal{H}$ 是一致可积的. □

定理 *若 $\mathcal{H}$ 是一致可积的, 则 $\mathcal{H}$ 在 L^1 中的闭凸包也是一致可积的.* 20

证 首先注意到一个一致可积集在 L^1 中的闭包是一致可积的: 这是定理 19 的一个直接推论. 从而我们只要证明 $\mathcal{H}$ 的凸包是一致可积的, 为此只需验证定理 19 中的条件 a) 和 b) 成立. a) 显然成立. 我们选取 δ, 使得对于每一个 $f \in \mathcal{H}$, (19.1) 成立; 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $\mathcal{H}$ 的元素, $t_1, \cdots, t_n \geqslant 0$ 满足 $t_1 + \cdots + t_n = 1$, A 为满足 $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$ 的可测集, 则有

$$\int_A |t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n| \mathbb{P} \leqslant t_1 \int_A |f_1| \mathbb{P} + \cdots + t_n \int_A |f_n| \mathbb{P} \leqslant \varepsilon.$$

从而条件 b) 成立. □

注 设 H 和 K 为 L^1 中的两个一致可积子集, 则它们的并 $H \cup K$ 显然是一致可积的, $H \cup K$ 的凸包也是一致可积的. 由于

$$\frac{1}{2}(H + K) \subset H \cup K \text{ 的凸包},$$

所以 $H + K$ 是一致可积的. 这一结论也可以由定理 19 很容易地推得.

下面的定理是控制收敛定理的推广.

定理 *设一列可积随机变量 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 几乎处处收敛[①]到随机变量 f. f 可积且 f_n 在 L^1 中强收敛到 f 的充分必要条件为 f_n 一致可积. 若 f_n 为非负随机变量, 则 f_n 在 L^1 中强收敛到 f 的充分必要条件为* 21

$$\lim_n \mathbb{E}[f_n] = \mathbb{E}[f] < \infty.$$

[①] 或者只是依测度收敛.

证　首先假设 f_n 在 L^1 中强收敛到 f (这需要假设 f 的可积性), 我们来证明定理 19 中的条件 a) 和 b) 成立.

对于任意的 $A \in \mathcal{F}$, 我们有

$$\int_A |f_n(\omega)|\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) \leqslant \int_A |f(\omega)|\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) + \|f_n - f\|_1. \tag{21.1}$$

从而条件 a) 成立. 选取 N 使得当 $n > N$ 时, $\|f_n - f\|_1 \leqslant \varepsilon/2$, 取 δ 使得当 $\mathbb{P}(A) \leqslant \delta$ 时, $\int_A |g|\mathbb{P} \leqslant \varepsilon/2$, 其中 g 取遍有限集 $\{f_1, f_2, \cdots, f_N, f\}$. 这样, 对于所有的 n, 当 $\mathbb{P}(A)$ 小于等于 δ 时, (21.1) 的左端小于等于 ε, 从而条件 b) 成立.

反之, 假设 f_n 是一致可积的, 则 $\mathbb{E}[|f_n|]$ 一致有界, 由 Fatou 引理, $\mathbb{E}[|f|] < \infty$. 我们来证明 f_n 在 L^1 中收敛到 f. 我们有

$$\mathbb{E}[|f_n - f|] \leqslant \mathbb{E}[|f_n^c - f^c|] + \mathbb{E}[|f_{nc}|] + \mathbb{E}[|f_c|]. \tag{21.2}$$

给定 $\varepsilon > 0$, 取充分大的 c, 使得对于所有的 n, 后两项期望均不超过 $\varepsilon/3$, 并且满足 $\mathbb{P}\{|f| = c\} = 0$ (这是可行的, 因为仅存在可数个 t 使得 $\mathbb{P}\{|f| = t\} > 0$). 因为函数 $|f_n^c - f^c|$ 一致有界且几乎处处收敛到 0, 由 Lebesgue 定理, 我们可以取充分大的 n, 使得第一项期望不超过 $\varepsilon/3$, 从而 (21.2) 的左端最多是 ε, 即 f_n 在 L^1 中强收敛到 f.

当 f_n 为非负时, 我们只需证明由 $\mathbb{E}[f_n]$ 收敛到 $\mathbb{E}[f] < \infty$ 可以推出 $\mathbb{E}[|f_n - f|]$ 收敛到 0 (从而 f_n 是一致可积的). 为此, 我们记

$$f + f_n = (f \vee f_n) + (f \wedge f_n).$$

由 Lebesgue 定理, $\mathbb{E}[f \wedge f_n]$ 收敛到 $\mathbb{E}[f]$. 另一方面, 由假设, $\mathbb{E}[f + f_n]$ 收敛到 $2\mathbb{E}[f]$. 从而 $\mathbb{E}[f \vee f_n]$ 收敛到 $\mathbb{E}[f]$. 由

$$|f - f_n| = f \vee f_n - f \wedge f_n$$

即得 $\mathbb{E}[|f - f_n|]$ 收敛到 0. □

我们给出如下定理 (归功于 la Vallée-Poussin) 的完整证明, 它可以帮助我们更好地理解一致可积性的意义. 其中 2)⇒1) 这一部分在实践中最为有用, 它也是较容易证明的. 例如, L^2 中的任意有界子集都是一致可积的 (取 $G(t) = t^2$).

22　**定理**　*设 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{L}^1$ 中的子集. 则下列性质等价:*

1) $\mathcal{H}$ 是一致可积的.

2) 存在 $\mathbb{R}_+$ 上满足 $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{G(t)}{t} = +\infty$ 的非负函数 $G(t)$[①]*, 使得*

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \mathbb{E}[G \circ |f|] < +\infty. \tag{22.1}$$

①我们构造的 G 同时还是凸函数.

证[1] 为证明 2)⇒1), 给定 $\varepsilon > 0$, 令 $a = \dfrac{M}{\varepsilon}$, 其中 M 为 (22.1) 左端的值. 取 c 充分大使得对于所有的 $t \geqslant c$, 有 $\dfrac{G(t)}{t} \geqslant a$, 则在集合 $\{|f| \geqslant c\}$ 上有 $|f| \leqslant \dfrac{G \circ |f|}{a}$, 这样对于任意的 $f \in \mathcal{H}$,

$$\int_{\{|f| \geqslant c\}} |f| \mathbb{P} \leqslant \frac{1}{a} \int_{\{|f| \geqslant c\}} G \circ |f| \mathbb{P} \leqslant \frac{1}{a} M = \varepsilon.$$

从而 $\mathcal{H}$ 满足定义 17.

现在来证明相反的方向, 我们构造具有形式 $\int_0^t g(s) \mathrm{d}s$ 的函数 $G(t)$, 其中 g 为增函数, 在 $t = 0$ 处等于 0, 当 t 趋于 $+\infty$ 时 $g(t)$ 也趋于 $+\infty$, 且在每一区间 $[n, n+1)(n \in \mathbb{N})$ 上取常数值 g_n. 对每一个 $f \in \mathcal{H}$, 记

$$a_n(f) = \mathbb{P}\{|f| > n\}.$$

因为 $g_0 = 0$, 我们得到

$$\mathbb{E}[G \circ |f|] \leqslant g_1 \cdot \mathbb{P}\{1 < |f| \leqslant 2\} + (g_1 + g_2) \cdot \mathbb{P}\{2 < |f| \leqslant 3\} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot a_n(f).$$

于是我们只需要证明可以适当地选取系数 g_n, 使得当 n 趋于无穷时, g_n 趋于无穷, 并且 $\sum g_n \cdot a_n(f)$ 是一致有界的. 由一致可积性假设, 我们可以取一列递增趋于无穷的序列 c_n, 使得

$$\int_{\{|f| \geqslant c_n\}} |f| \mathbb{P} \leqslant 2^{-n} \quad (f \in \mathcal{H}).$$

我们有

$$\int_{\{|f| \geqslant c_n\}} |f| \mathbb{P} \geqslant \sum_{k=c_n}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}\{k < |f| \leqslant k+1\} \geqslant \sum_{m=c_n}^{\infty} \mathbb{P}\{|f| > m\} = \sum_{m=c_n}^{\infty} a_m(f).$$

从而对于 $f \in \mathcal{H}$, 和式 $\sum_n \sum_{c_n}^{\infty} a_m(f)$ 是一致有界的; 而该和式具有形式 $\sum_m g_m a_m(f)$, 其中 g_m 为使得 $c_n \leqslant m$ 成立的整数 n 的个数. 定理证毕. □

弱拓扑

我们将给出关于弱拓扑 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 或 $\sigma(L^\infty, L^1)$ 的一些结果, 这些结果与一致可积性有着紧密的联系. 有时我们会用到在后面 (第 40 段) 定义的条件期望算子, 但是这并不会导致循环论证.

首先我们给出一个著名定理:

定理 (Vitali-Hahn-Saks) 设 (μ_n) 为可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上 (未必非负) 的一列有限 23

[1] 英文版第 III 卷补注: 这里很有用的补充是把 G 选成平和 (modérée) 的. 这种选择的存在性参见 Sém. Prob. XII, LNM 649, 第 770—771 页.

测度, λ 为一个非负有限测度, 使得 μ_n 关于 λ 绝对连续. 若对于所有的 $A \in \mathcal{F}$, 极限 $\mu(A) = \lim_n \mu_n(A)$ 存在且有限, 则

1) μ 为有限测度.

2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $\lambda(A) \leqslant \eta$ 时, $\sup_n |\mu_n|(A) \leqslant \varepsilon$. 而且全变差 $||\mu_n||$ 是一致有界的.

证[①] 首先我们注意到, 存在 λ 使得 μ_n 关于 λ 绝对连续并不是一个限制条件. 这样的非负测度 λ 总存在: 事实上, 我们只需取 $\lambda = \sum |\mu_n|/2^n ||\mu_n||$ 即可. 然后, 通过和定理 19 作比较, 我们可以用另一种方式叙述 2): 密度 μ_n/λ 关于 λ 是一致可积的.

设 Φ 为 $L^1(\lambda)$ 中由 $\mathcal{F}$-可测集的示性函数的等价类所构成的子集 (我们将这些等价类用它们在 $\mathcal{F}$ 中的代表元表示), 则 Φ 在 L^1 中为闭集, 从而 Φ 为完备度量空间. 函数 $A \mapsto \mu_n(A)$ 在 Φ 上连续, 且点点收敛到 $A \mapsto \mu(A)$.

设 $\alpha > 0$, 记

$$L_j = \{U \in \Phi : \forall m \geqslant j, \forall n \geqslant j, |\mu_n(U) - \mu_m(U)| \leqslant \alpha\}.$$

于是 L_j 为 Φ 中的闭子集并且 L_j 的并集为整个 Φ. 由 Baire 定理, 存在 j, 使得 L_j 有一个内点 A. 换句话说, 存在某个整数 j 和实数 $h > 0$, 使得当 $n \geqslant j, m \geqslant j, \lambda(B \triangle A) \leqslant h$ 时, $|\mu_n(B) - \mu_m(B)| \leqslant \alpha$.

取定上述 j, 设 $\eta \in (0, h)$ 使得当 $\lambda(C) \leqslant \eta$ 时, $|\mu_i(C)| \leqslant \alpha, i = 0, 1, \cdots, j$ (从而 $|\mu_i|(C) \leqslant 2\alpha$[②]). 对于 $n \geqslant j$, 我们有

$$\begin{aligned}|\mu_n(C)| &\leqslant |\mu_n(A \cup C) - \mu_n(A)| + |\mu_n(A \setminus C) - \mu_n(A)| \\ &\leqslant |\mu_n(A \cup C) - \mu_j(A \cup C)| + |\mu_j(A \cup C) - \mu_j(A)| + |\mu_j(A) - \mu_n(A)| \\ &\quad + |\mu_n(A \setminus C) - \mu_j(A \setminus C)| + |\mu_j(A \setminus C) - \mu_j(A)| + |\mu_j(A) - \mu_n(A)|.\end{aligned}$$

从而 $\lambda(C) \leqslant \eta \Longrightarrow \sup_n |\mu_n|(C) \leqslant 12\alpha$. 我们得到下列性质:

1) 因为 Ω 可以分解为有限个 (关于 λ 的) 测度不超过 η 的集合, 以及有限个测度大于等于 η 的原子, 所以 μ_n 的全变差有界. 注意到当 μ_n 非负时, 这一结果显然成立.

2) 取 $\alpha = \varepsilon/12$. 定理中的最后一部分即证.

3) 由可加集合函数 μ 的有界性, 以及性质 2), 我们可以推出 μ 为关于 λ 绝对连续的测度. 设 (E_k) 为 $\mathcal{F}$ 中交集为空集的递降序列: 由 $\lambda(E_k) \to 0$, 得到 $\mu(E_k) \to 0$; 因此 μ 是可数可加的. 我们知道此时 μ 为两个非负测度之差. 定理证毕. □

---

①译校者注: 原书的证明中有若干打印错误, 参照严加安先生的意见修改.

②回顾一下对于任一测度 θ, $|\theta|(A) = \sup_{B \subset A}(|\theta(B)| + |\theta(A \setminus B)|)$.

我们将证明拓扑向量空间上的一般的 Eberlein 和 Šmulian 定理的一种特殊情况, 这时有简单的直接证明. 我们照常只考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

定理 *设 K 为 L^1 中的子集, 并且它在弱拓扑 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 下为紧集. 若 σ-代数 $\mathcal{F}$ 可分, 则 K 为可度量化空间. 无论 $\mathcal{F}$ 是否可分, K 中的任意序列必存在收敛子列.* 24

证 首先我们假设 $\mathcal{F}$ 可分. 设 (H_n) 为生成 $\mathcal{F}$ 的一列元素, $\mathcal{A}$ 为全体 H_n 生成的 Boole 代数; 容易验证 $\mathcal{A}$ 为可数集. 另一方面, 如果 f 和 g 为 L^1 中的两个元素, 由 $\int_A f\mathbb{P} = \int_A g\mathbb{P}$ 对于所有的 $A \in \mathcal{A}$ 成立, 可以推出 $f = g$ 几乎必然成立 (参见第 I 章定理 20). 我们将 $\mathcal{A}$ 中的元素排成一列, 记为 (A_n), 对 $f, g \in K$, 令

$$d(f,g) = \sum a_n^{-1} \left| \int_{A_n} f\mathbb{P} - \int_{A_n} g\mathbb{P} \right|, \text{ 其中 } a_n = 2^n \left(1 + \sup_{h \in K} \left| \int_{A_n} h\mathbb{P} \right| \right),$$

则 d 为 K 上的一个距离, 相应的拓扑是分离的, 并且它粗于 K 的 (紧) 拓扑, 从而它们相等.

设 (f_n) 为 K 中的一列元素, $\mathcal{F}_0$ 为全体 f_n 生成的 σ-代数. 尽管 $\mathcal{F}$ 未必可分, 但是 $\mathcal{F}_0$ 可分. 设 U 为条件期望算子 $g \mapsto \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_0]$, 它将 $L^1(\mathcal{F})$ 连续映射到 $L^1(\mathcal{F}_0)$. $U(K)$ 为 $L^1(\mathcal{F}_0)$ 中的可度量化弱紧子集, 并且 $U(f_n) = f_n$. 从而可以取 (f_n) 的一个在弱拓扑 $\sigma(L^1(\mathcal{F}_0), L^\infty(\mathcal{F}_0))$ 下收敛到 $f \in L^1(\mathcal{F}_0)$ 的子列 (f'_n). 现在考虑 $g \in L^\infty(\mathcal{F})$, 令 $h = \mathbb{E}[g|\mathcal{F}_0] \in L^\infty(\mathcal{F}_0)$. 我们有

$$\int f'_n g\mathbb{P} = \int f'_n h\mathbb{P} \to \int fh\mathbb{P} = \int fg\mathbb{P}.$$

从而在弱拓扑 $\sigma(L^1(\mathcal{F}), L^\infty(\mathcal{F}))$ 下, $f'_n \to f$. 定理成立. □

注 定理 24 可以推广到弱拓扑 $\sigma(L^p, L^q)$ 的情形, 其中 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, q 为 p 的共轭指数.

下面定理中的 1) ⇒ 3) 是后续章节中的基本工具之一. 其他的蕴含关系虽然不那么常用, 但是同样十分有意思.

定理 (Dunford-Pettis 紧性判别法) ①*设 $\mathcal{H}$ 为 L^1 中的子集, 则下列三条性质等价:* ㉕

1) *$\mathcal{H}$ 是一致可积的.*
2) *在弱拓扑 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 下, $\mathcal{H}$ 在 L^1 中相对紧.*
3) *$\mathcal{H}$ 中的任一序列存在弱拓扑 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 下的收敛子列.*

---

①对于非有限测度的情形, 参见 Dunford-Schwartz [1].

证 我们先证 1) $\Rightarrow$ 2). 设 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的一个超滤子, 对任意函数 $f \in \mathcal{H}$ 和集合 $E \in \mathcal{F}$, 定义

$$I_f(E) = \int_E f(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

由 $|I_f(E)| \leqslant \mathbb{E}[|f|]$ 和定理 19 中的 a), $I_f(E)$ 是一致有界的. 对于所有的 $E \in \mathcal{F}$, 极限

$$I(E) = \lim_{\mathcal{U}} I_f(E)$$

存在. 显然集合函数 $E \mapsto I(E)$ 是有界且可加的. 由定理 19 中的 b), 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\mathbb{P}(E) \leqslant \delta$ 时, $|I(E)| < \varepsilon$; 从而 I 为关于 $\mathbb{P}$ 绝对连续的测度. 由 Radon-Nikodym 定理, 存在 $\varphi \in L^1$, 使得对任意可测集 E,

$$I(E) = \int_E \varphi(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

如果我们能证明超滤子 $\mathcal{U}$ 在弱拓扑下收敛到 φ, 那么 2) 成立. 而显然, 对每一个示性函数的线性组合 $g \in \mathcal{L}^\infty$,

$$\lim_{\mathcal{U}} \mathbb{E}[f \cdot g] = \mathbb{E}[\varphi \cdot g].$$

而任一函数 $g \in \mathcal{L}^\infty$ 为上述函数的一致极限, 由一致收敛性知 2) 成立.

由定理 24 得到 2) $\Rightarrow$ 3). 最后, 我们证明 3) $\Rightarrow$ 1): 假设 1) 不成立, 那么存在 $\mathcal{H}$ 中的子列 (f_n) 使得下述两种情况必居其一: 要么 $\mathbb{E}[|f_n|] \to +\infty$, 要么存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\mathcal{F}$ 中的一列元素 (A_n), 使得 $\mathbb{P}(A_n)$ 收敛到 0 并且 $\int_{A_n} |f_n|\mathbb{P} \geqslant \varepsilon$. 由定理 23 的 2), 这一序列不存在收敛子列, 从而 3) 不成立. 定理得证. □

下面的定理说明了 L^1 中弱收敛和强收敛的区别: 一个弱收敛但是不强收敛的序列 (f_n) 会在其弱极限附近有强烈振动.

26 **定理** *设 (f_n) 为 Ω 上一列在 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 下收敛到 f 的可积函数. 设 $A \in \mathcal{F}$ 使得在 A 上 $f \leqslant \liminf_n f_n$ 几乎必然成立, 则 $\int_A |f - f_n|\mathbb{P} \to 0$.*

证 我们只需考虑 $f = 0$, $A = \Omega$ 的情形. 由定理 25, 函数 f_n 是一致可积的. 取 $\alpha > 0$ 使得当 $\mathbb{P}(U) < \alpha$ 时, 对所有的 n, $\int_U |f_n|\mathrm{d}\mathbb{P} < \varepsilon$. 对于整数 N, 令

$$A_N = \left\{\omega : \inf_{n \geqslant N} f_n(\omega) \geqslant -\varepsilon\right\}.$$

由假设, $\liminf_n f_n \geqslant 0$, 我们可以取充分大的 N 使得 $\mathbb{P}(A_N^c) < \alpha$. 由于 (f_n) 弱收敛到 0, 从而我们可以取 $N' \geqslant N$ 使得当 $n \geqslant N'$ 时, $|\int_{A_N} f_n\mathbb{P}| \leqslant \varepsilon$. 于是当 $n \geqslant N'$ 时, 我们有

$$\int |f_n|\mathbb{P} \leqslant \int_{A_N} |f_n|\mathbb{P} + \int_{A_N^c} |f_n|\mathbb{P} \leqslant \int_{A_N} |f_n + \varepsilon|\mathbb{P} + \int_{A_N} \varepsilon\mathbb{P} + \int_{A_N^c} |f_n|\mathbb{P}.$$

最后两项积分均不超过 ε (其中由 α 和 N 的选取得到最后一项不超过 ε). 另一方面, 由 A_N 的定义, 并且注意到 $n \geqslant N'$, 右边第一项积分等于 $\int_{A_N}(f_n+\varepsilon)\mathbb{P} \leqslant |\int_{A_N} f_n\mathbb{P}| + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$. 最终, 我们得到 $\int |f_n|\mathbb{P} \leqslant 4\varepsilon$. □

Mokobodzki 的一个定理

我们已经知道任何一个依概率收敛的序列存在几乎必然收敛的子列 (第 10 段). 我们经常会遇到这样的情况 (特别在 Markov 过程理论中), 给定 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一族概率测度 $(\mathbb{P}_i)$, 序列 (f_n) 在每一个 $\mathbb{P}_i$ 下均依概率收敛, 我们是否可以选取 f, 使得在每一个概率 $\mathbb{P}_i$ 下, f_n 依概率收敛到 f? 如果我们知道怎样从 (f_n) 中选取一个子列 (f'_n), 使得对于任意的 i, 它都是关于 $\mathbb{P}_i$ 几乎必然收敛的, 那么 $f = \liminf_n f'_n$ 即为所求. 不幸的是, 第 10 段中的选取过程依赖于 $\mathbb{P}_i$.

Mokobodzki 证明了存在一个一般的选取过程 (利用滤子, 而不是子列), 从而证明了 f 的存在性. 证明中用到 "连续统假设" 或连续公理. 后面我们将用另一种方法 (也用到连续统假设) 得到类似的结果① (参见 Meyer[1]).

引理 *存在 $\mathbb{N}$ 上的滤子 r 满足下列性质: 对于每一个严格递增的非负整数列 (s_n), 存在严格递增序列 (t_n) 满足* 27

1) *对于所有充分大的 n, $s_n \leqslant t_n$.*

2) *对于所有的 n, 集合 $\{t_n, t_{n+1}, \cdots\}$ 属于 r.*

证 我们记 I 为所有可数序数 (第 0 章第 8 段) 组成的集合, $\mathcal{S}$ 为所有严格递增非负整数列组成的集合. 由连续统公理, 存在从 I 到 $\mathcal{S}$ 的双射 $i \mapsto s^i$. 我们将用超限归纳法构造从 I 到 $\mathcal{S}$ 上的映射 $i \mapsto t^i$, 满足下列性质:

a) 对所有充分大的 n, $s^i_n \leqslant t^i_n$.

b) 当 $i < j$ 时, 除去有限项外, t^j 为 t^i 的子列.

如果这样的映射存在, 那么引理可以证明如下: 对每一个 i, f_i 为序列 t^i 对应的 "初等滤子", 即包含除去有限个外所有的 t^i_n 的序列 $A \subset \mathbb{N}$ 组成的集合. 由性质 b), 映射 $i \mapsto f_i$ 递增, 从而存在一个包含所有 f_i 的滤子 (甚至是超滤子) r, 但是另一方面, 所有的严格递增序列都已被列举. 由 a), 滤子 r 满足引理.

下面我们给出详细的构造过程. 记 $t^0 = s^0$. 假设 t^i 已经构造出, 记 t^{i+1} 为 t^i 的子列, 满足对所有的 k, $s^{i+1}_k \leqslant t^{i+1}_k$ (直接对 k 归纳即得). 如果 a) 和 b) 对第 i 项成立, 那么它们对第 $i+1$ 项仍成立. 如果 i 是一个极限序数并且对所有的 $j < i$, t^j 已经构造出, 我们可以构造 t^i 如下: 选取一列严格递增序数 $j_n < i$ 使得 $i = \sup_n j_n$. 由 b), 通过删除 t^{j_n} 开头的有限项可以构造序列 u^n, 使得对所有的 n, u^{n+1} 为 u^n 的子列. 通过删除一些项我们可以假设对所有的 n, $u^n_0 \geqslant s^i_n$. 记 $t^i_n = u^n_0$. 这一序列除去有限项外为每一个序列 t^{j_n} 中的子列, 并且由构造过程可以看出它比 s^i 增长得

①英译本注: 即也是由 Mokobodzki 得到的关于 "内侧极限" 的结果.

"更快". 由超限归纳法, 上述构造是可行的. 引理证毕. □

我们称满足引理 27 中 1) 和 2) 的滤子为快滤子.

28　**定理**　设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个完备概率空间, (f_n) 为一列依概率收敛到 f 的可测函数. 设 r 为 $\mathbb{N}$ 上的一个快滤子, 那么对于几乎所有的 ω,

$$\lim_r f_n(\omega) = f(\omega).$$

证　我们只需考虑 f_n 和 f 取值于 $[-1,1]$ 的情形. 于是 f_n 在 L^1 中收敛到 f. 设递增整数列 $s = (s_k)$ 满足当 $m \geqslant s_k$ 时, $||f_m - f|| \leqslant 2^{-k}$. 设序列 $t = (t_k)$ 使得对所有充分大的 k, $s_k \leqslant t_k$, 且 r 比 t 上对应的初等滤子更细. 因为 $\sum ||f_{t_{k+1}} - f_{t_k}||_1 < \infty$, 我们有, 在该初等滤子上, $\lim f_n(\omega) = f(\omega)$ 几乎必然成立, 从而对于更细的滤子 r 结论也成立. □

29　**推论**　设 (f_n) 为一列 $\mathcal{F}$-可测函数, $f = \liminf_r f_n$. 若对每一个概率测度 $\mathbb{P}$ 使得 (f_n) 在 $\mathbb{P}$ 下收敛, 则 f 与一个 $\mathcal{F}$-可测函数在 $\mathbb{P}$ 下几乎必然相等, 并且在 $\mathbb{P}$ 下有 $f_n \to f$.

我们注意到极限 f 一般说来未必普遍可测.

§3　完备化、独立性、条件化

我们现在回过头来看一些本质上属于概率论的初等结果.

内部零集

30　**定义**　设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, $A \subset \Omega$, 如果对任意包含于 A 中的 $\mathcal{F}$ 的元素 B, 都有 $\mathbb{P}(B) = 0$, 那么称集合 A 是一个内部 $\mathbb{P}$-零集.

31　**定理**　设 $\mathcal{N}$ 为 Ω 中的一个集类, 满足下列条件:

1) $\mathcal{N}$ 对于运算 $(\cup d)$ 封闭.

2) $\mathcal{N}$ 中的每一元素为内部 $\mathbb{P}$-零集.

设 $\mathcal{F}'$ 为由 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{N}$ 生成的 σ-代数, 则概率测度 $\mathbb{P}$ 可以唯一地扩张为 $\mathcal{F}'$ 上的概率测度 $\mathbb{P}'$, 使得 $\mathcal{N}$ 中的任一元素均为 $\mathbb{P}'$-零集.

证　我们仅给出证明的主要步骤, 证明的详细过程留给读者.

设 $\mathcal{M}$ 为被 $\mathcal{N}$ 中的元素所包含的 Ω 中的子集组成的集类. $\mathcal{G}$ 为形如 $F \triangle M (F \in \mathcal{F}, M \in \mathcal{M})$ 的集合全体. 容易验证 $\mathcal{G}$ 为 σ-代数; 由于 $\mathcal{M}$ 包含空集, 从而 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, 同理, $\mathcal{M} \subset \mathcal{G}$.

设 $A = F \triangle M$ 为 $\mathcal{G}$ 中的元素; 令 $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{P}(F)$. 可以验证 $\mathbb{Q}(A)$ 仅依赖于 A, 而与 A 的表示 $F \triangle M$ 无关.

为证明 $\mathbb{Q}$ 为 $\mathcal{G}$ 上的概率测度, 我们考虑 $\mathcal{G}$ 中一列两两不相交的集合 (A_n), 它们的并集记为 A. 每一个 A_n 都具有形式 $F_n\triangle M_n(F_n\in\mathcal{F}, M_n\in\mathcal{M})$; 设 F 为 F_n 的并集. 由于 F_n 在相差一个零测集的意义下两两不相交, 从而 $\mathbb{P}(F)=\sum_n\mathbb{P}(F_n)$. 另一方面, A 和 F 只相差 $\mathcal{M}$ 中的一个元素, 从而 $\mathbb{Q}(A)=\sum_n\mathbb{Q}(A_n)$. 所求的概率测度 $\mathbb{P}'$ 为 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathcal{F}'$ 上的限制.

为了证明唯一性, 我们考虑 $\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{F}'$ 上的另一个扩张 $\mathbb{P}''$, 使得 $\mathcal{N}$ 中的每一个元素都是 $\mathbb{P}''$-零集. 于是 $\mathcal{M}$ 中的每一个元素都是内部 $\mathbb{P}''$-零集, 从而 $\mathbb{P}''$ 可以扩张到 $\mathcal{G}$ 上, 使得 $\mathcal{M}$ 中的元素均为零测集. 这个概率测度等于 $\mathbb{Q}$, 从而 $\mathbb{P}'=\mathbb{P}''$. □

注 a) 上述定理常用于 $\mathcal{N}$ 仅由一个内部零集构成的情形. 32

b) 这一定理说明了概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 的完备化 (参见第 3 段) 的存在性: 只需取 $\mathcal{N}$ 为所有 $\mathbb{P}$-零集的全体子集即可.

设 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ 为完备化后得到的 σ-代数. $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ 中的每一个元素都可以表示为 $F\triangle M$, 其中 $F\in\mathcal{F}$, M 包含于某个 $\mathbb{P}$-零集 $N\in\mathcal{F}$ 中. 从而 $F\triangle M$ 介于两个集合 $F\setminus N$ 和 $F\cup N$ 之间, 这两个集合都属于 $\mathcal{F}$, 并且它们仅相差一个零集, 显然这个性质刻画了 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ 中的元素. 由常见的用阶梯函数逼近可测函数的方法我们可以给出如下结论:

一个数值函数 f 关于完备化后得到的 σ-代数 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$-可测, 当且仅当存在两个 $\mathcal{F}$-可测的数值函数 g 和 h 满足

$$g\leqslant f\leqslant h,\ \mathbb{P}\{g\neq h\}=0.$$

c) 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间, 对于 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的每个概率测度 $\mathbb{P}$, 考虑完备化后得到的 σ-代数 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$, 记 $\widehat{\mathcal{F}}$ 为所有 σ-代数 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ 的交: 可测空间 $(\Omega,\widehat{\mathcal{F}})$ 称为 $(\Omega,\mathcal{F})$ 的普遍完备化. 读者可以验证如下性质成立:

1) $\mathcal{F}$ 上的每一个概率测度 $\mathbb{P}$ 可以唯一地扩张为 $\widehat{\mathcal{F}}$ 上的概率测度 $\widehat{\mathbb{P}}$, 且 $\mathbb{P}\mapsto\widehat{\mathbb{P}}$ 是从 $\mathcal{F}$ 上测度的集合到 $\widehat{\mathcal{F}}$ 上测度的集合的双射.

2) 设 $(E,\mathcal{E})$ 为可测空间, f 为从 $(\Omega,\mathcal{F})$ 到 $(E,\mathcal{E})$ 的可测映射, 则 f 亦为从 $(\Omega,\widehat{\mathcal{F}})$ 到 $(E,\widehat{\mathcal{E}})$ 的可测映射.

d) 我们将 Borel σ-代数 $\mathcal{B}(E)$ 的普遍完备化记为 $\mathcal{B}_u(E)$, 称之为 E 的普遍可测集生成的 σ-代数. 设 E 和 F 为两个拓扑空间, f 为从 E 到 F 的映射. 若 f 是从 $\mathcal{B}_u(E)$ 到 $\mathcal{B}_u(F)$ 的可测映射, 则称 f 是普遍可测的. 由 c), 只需它是从 $\mathcal{B}_u(E)$ 到 $\mathcal{B}(F)$ 的可测映射.

独立性

初等概率论的教科书对独立性这个概念都非常重视. 本书中, 我们不需要太多关于独立性的知识, 想了解更多细节的读者可以参考 Chung [1].

定义 *设 $(X_i)_{i\in I}$ 为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上取值于可测空间 $(E_i,\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ 的有限个* 33

随机变量. 设 X 为取值于空间 $(\prod_{i\in I} E_i, \prod_{i\in I} \mathcal{E}_i)$ 的随机变量 $(X_i)_{i\in I}$. 若 X 的分布为 X_i 的分布的乘积, 则称这些随机变量 X_i 是独立的.

设 $(X_i)_{i\in I}$ 为一族随机变量. 如果其任一有限子族独立, 那么称 X_i 是独立的.

这一定义可以用下面的形式给出 (参见第 14 段), 随机变量族 $(X_i)_{i\in I}$ 独立当且仅当对任意有限子集 $J \subset I$ 和任意满足 $A_i \in \mathcal{E}_i$ 的集类 $(A_i)_{i\in J}$,

$$\mathbb{P}\{\forall i \in J, X_i \in A_i\} = \prod_{i\in J} \mathbb{P}\{X_i \in A_i\}.$$

我们给出独立性的另一种同样有用的定义.

34 **定义** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一族子 σ-代数. 如果对每一个有限子集 $J \subset I$ 和集类 $(A_i)_{i\in J}$ (对所有的 $i \in J$, $A_i \in \mathcal{F}_i$),

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i),$$

那么我们称 σ-代数族 $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ 独立.

定义 33 和 34 可以相互推出. 随机变量族 $(X_i)_{i\in J}$ (在定义 33 下) 独立当且仅当 σ-代数族 $\mathcal{T}(X_i)$ (在定义 34 下) 独立. 同理, σ-代数族 $(\mathcal{F}_i)_{i\in J}$ 独立当且仅当随机变量族 (X_i) 独立, 其中 X_i 为从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\Omega, \mathcal{F}_i)$ 的恒等映射.

35 **定理** 设 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n$ 为一族独立的 σ-代数, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为关于相应的 σ-代数 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n$ 可测的可积数值随机变量, 则它们的乘积 $f_1 f_2 \cdots f_n$ 可积, 且有

$$\mathbb{E}[f_1 \cdot f_2 \cdots f_n] = \mathbb{E}[f_1] \cdot \mathbb{E}[f_2] \cdots \mathbb{E}[f_n].$$

条件化

条件期望是概率论中的基本概念. 我们在第 36—40 段中给出各种不同形式的定义. 然后在第 41 段中列出读者必须牢记的各种性质.

36 **定理** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间, f 为从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到某一个可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的随机变量, $\mathbb{Q}$ 为概率测度 $\mathbb{P}$ 在 f 下的像.

设 X 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上一个 $\mathbb{P}$-可积的随机变量, 则存在 $(E, \mathcal{E})$ 上一个 $\mathbb{Q}$-可积的随机变量 Y, 满足对于任意的 $A \in \mathcal{E}$,

$$\int_A Y(x)\mathbb{Q}(\mathrm{d}x) = \int_{f^{-1}(A)} X(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega). \tag{36.1}$$

若 Y' 为满足 (36.1) 的另一个随机变量, 则 $Y' = Y$ 几乎必然成立.

证 Y 的唯一性由注 9.a) 可以直接证明.

为证明 Y 的存在性, 首先假设 $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$. 对 $\mathcal{L}^2(\mathbb{Q})$ 中的任意元素 Z, 考虑 $\int_\Omega (Z \circ f) X.\mathbb{P}$, 其值仅依赖于 Z 的等价类. 于是我们得到一个 $L^2(\mathbb{Q})$ 上的线性泛函, 其范数至多为 $\|X\|_2$. 从而存在函数 $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Q})$ 使得

$$\int_\Omega (Z \circ f) X.\mathbb{P} = \int_E ZY.\mathbb{Q} \quad (Z \in \mathcal{L}^2(\mathbb{Q})).$$

则函数 Y 即为所求.

如果 X 还是非负的, 那么 Y 在任一集合 $A \in \mathcal{E}$ 上的积分也非负; 由注 9.a), 它几乎必然非负.

我们转而考虑 X 仅为可积的情形. 同样的结论对 X 的正部 X^+ 和负部 X^- 均成立. 随机变量 $X_n^+ = X^+ \wedge n (n \in \mathbb{N})$ 属于 $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$. 由上述讨论, 我们得到相应的 Y_n^+. 由前述的注, 这些随机变量几乎必然非负, 几乎必然关于 n 递增, 并且它们的积分被 $\mathbb{E}[X^+]$ 控制, 从而我们可以选取可积随机变量 Y^+, 几乎必然等于 Y_n^+ 的极限. 同理, 对于 X^-, 我们可以得到 Y^-. 于是可积随机变量 $Y = Y^+ - Y^-$ 满足 (36.1). 定理成立. □

37 **定义** 设 Y 为满足 (36.1) 的 $\mathcal{E}$-可测 $\mathbb{Q}$-可积的随机变量, 我们称 Y 为 X 关于 f 的 (一个等价型的) 条件期望.

我们将其暂时记为 $\mathbb{E}[X|f]$, 这一记号在第 39 段之后将不再使用.

38 **注** a) 如果 X 为事件 B 的示性函数, $\mathbb{E}[X|f]$ 称为 B 关于已知的 f 的条件概率. 此时应当牢记这一 “概率” 并不是一个数, 而是一个在几乎必然相等的意义下唯一确定的随机变量.

b) 我们将 Ω 划分为一列可测集 A_n, 设 f 为 Ω 到 $\mathbb{N}$ 上的映射, 满足 f 在 A_n 上等于 n. 定义 $\mathbb{N}$ 上的测度 $\mathbb{Q}$ 为

$$\mathbb{Q}(\{n\}) = \mathbb{P}(A_n).$$

设 X 为 Ω 上的可积随机变量, 我们容易计算 $Y = \mathbb{E}[X|f]$. 对所有满足 $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$ 的 n,

$$Y(n) = \frac{\int_{A_n} X\mathbb{P}}{\mathbb{P}(A_n)}.$$

当 $\mathbb{P}(A_n)$ 等于零时, $Y(n)$ 可以任意取值[①]. 特别的, 如果 X 为事件 B 的示性函数, 那么当 $\mathbb{P}(A_n)$ 不等于零时, $Y(n) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)}$. 我们看出来, 在初等概率论里, 这个数称为事件 B 在 A_n 发生时的条件概率. 这让我们不禁想在更一般的情形下, 把 $Y(x)(x \in E)$ 的值称为 “已知 $f(\omega) = x$ 时, X 的条件概率”, 但这是不恰当的, 因为

① 通常, 我们取 $Y(n) = 0$, 以便与约定 $\frac{0}{0} = 0$ 一致.

随机变量 Y 只是在几乎必然相等的意义下有定义, 而且只有在 $\mathbb{Q}(\{x\}) \neq 0$ 的时候才能讨论 Y 在 x 点的值.

39 a) 设 X 为不可积的非负随机变量. 在定理 36 的证明中取单调极限的过程仍然可行, 这样我们得到一个满足 (36.1) 的 (在几乎必然相等的意义下唯一确定, 未必有限的) 非负随机变量 Y. 我们仍记为 $\mathbb{E}[X|f]$, 称之为广义条件期望. $\mathbb{E}[X|f]$ 几乎必然有限当且仅当存在 $\mathcal{E}$ 中一列并集为 E 的递增序列 (A_n), 使得对所有的 n,

$$\int_{f^{-1}(A_n)} X\mathbb{P} < +\infty.$$

b) 给定随机变量 X, 若 $\mathbb{E}[X^+|f]$ 和 $\mathbb{E}[X^-|f]$ 都几乎必然有限, 则称 X 存在广义条件期望, 并令 $\mathbb{E}[X|f] = \mathbb{E}[X^+|f] - \mathbb{E}[X^-|f]$.

我们之所以先给出条件期望的定义 37 是因为该定义比较直观. 但是它还有一个重要得多的变体: 事实上, 我们在下文中将只使用这个定义. 在第 37—39 段中, 我们令 E 等于 Ω, $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ-代数, f 为 Ω 上的恒等映射. 这时测度 $\mathbb{Q}$ 的像为 $\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{E}$ 上的限制, 我们有如下定义:

40 **定义** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个概率空间, $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数, X 为可积随机变量. X 关于 $\mathcal{E}$ 的 (一个等价型的) 条件期望是一个 $\mathcal{E}$-可测的可积随机变量 Y, 满足对所有的 $A \in \mathcal{E}$,

$$\int_A X(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_A Y(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega). \tag{40.1}$$

一般的, 我们将省略 "等价型" 一词. 记 Y 为 $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$[①]. 如果 $\mathcal{E}$ 为一族随机变量生成的 σ-代数 $\mathcal{T}(f_i, i \in I)$, 那么我们称之为 X 关于 f_i 的条件期望, 记作 $\mathbb{E}[X|f_i, i \in I]$. 如果 X 为事件 A 的示性函数, 那么我们称之为 A 关于 $\mathcal{E}$ (或 f_i) 的条件概率, 记作 $\mathbb{P}(A|\mathcal{E})$, $\mathbb{P}(A|f_i, i \in I)$. 如下的双重条件期望经常出现:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1]|F_2],$$

其中 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 为 $\mathcal{F}$ 的两个子 σ-代数. 此时, 我们使用更简洁的记号 $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1|\mathcal{F}_2]$, 这完全不会引起歧义.

注 a) 回到第 36—37 段中的记号, 设 $\mathcal{S}$ 为 σ-代数 $\mathcal{T}(f)$. 我们有, $\mathbb{E}[X|\mathcal{S}] = Y \circ f$ 几乎必然成立. 由定理 I.18, 定义 37 变为定义 40.

b) 一个既不非负也不可积的随机变量 X 在 $\mathcal{E}$ 下存在广义条件期望当且仅当测度 $|X|.\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{E}$ 上 σ-有限.

条件期望的基本性质

41 我们列出以后会经常使用的条件期望的所有性质. 特别的, 我们用另一种方式

[①]Hunt 将其简记为 $\mathcal{E}X$, 这是一个绝妙的记号!

重新叙述定义 40.

此处涉及的所有随机变量均定义在同一个空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上.

性质 1 设 X 和 Y 为可积随机变量, a, b, c 为常数, 则对任意一个 σ-代数 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}[aX + bY + c|\mathcal{E}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{E}] + c \text{ p.s.} \tag{41.1}$$

性质 2 设 X 和 Y 为可积随机变量并且 $X \leqslant Y$ 几乎必然成立, 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] \leqslant \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]$ 也几乎必然成立.

性质 3 设 $X_n (n \in \mathbb{N})$ 为一列可积随机变量且递增收敛到可积随机变量 X, 则

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] = \lim_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{E}] \text{ p.s.} \tag{41.2}$$

性质 4 (Jensen 不等式) 设 c 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的凸映射, X 为可积随机变量并且 $c \circ X$ 亦可积, 我们有

$$c \circ \mathbb{E}[X|\mathcal{E}] \leqslant \mathbb{E}[c \circ X|\mathcal{E}] \text{ p.s.} \tag{41.3}$$

证 函数 c 为可数个仿射函数 $L_n(x) = a_n x + b_n$ 的上包络. 随机变量 $L_n \circ X$ 可积, 并且有

$$L_n \circ \mathbb{E}[X|\mathcal{E}] = \mathbb{E}[L_n \circ X|\mathcal{E}] \leqslant \mathbb{E}[c \circ X|\mathcal{E}].$$

我们在左边取上包络即得. 如果 X 取值于某个区间 I, 那么我们只需要 c 在 I 上是凸函数即可. □

性质 5 设 X 为可积随机变量, 则 $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ 是 $\mathcal{E}$-可测的. 若 X 是 $\mathcal{E}$-可测的, 则 $X = \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ 几乎必然成立 (这是条件期望定义的部分重述, 由其唯一性上式显然成立).

性质 6 设 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{F}$ 的两个子 σ-代数并且 $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, 则对任意一个可积随机变量 X, 有

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{E}|\mathcal{D}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{D}] \text{ p.s.} \tag{41.4}$$

特别的,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]] = \mathbb{E}[X]. \tag{41.5}$$

(前一等式由唯一性可证. 为证后一等式, 我们只需取 $\mathcal{D} = \{\varnothing, \Omega\}$.)

性质 7 设 X 为可积随机变量, Y 为 $\mathcal{E}$-可测的随机变量, 使得 XY 仍可积, 则

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{E}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] \text{ p.s.} \tag{41.6}$$

证 当 Y 仅取有限个值时, 由条件期望的定义我们得到 (41.6) 成立. 利用单调收敛定理可以证明一般情形成立. □

将上述性质推广到广义条件期望的情形是有意思的. 这里我们留给读者自行完成.

42 **连续性质**

取 $c(x)$ 为函数 $|x|^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 应用 Jensen 不等式, 我们得到

(42.1) $$||\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]||_p \leqslant ||X||_p.$$

同样的不等式对 $p=\infty$ 显然成立. 映射 $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ 为 $L^p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 上的范数小于等于 1 的算子. 众所周知, Banach 空间 B 上的连续线性算子在 B 上给定弱拓扑 $\sigma(B, B^*)$ 时仍连续 (例如参见 Bourbaki [1]①, Dunford-Schwartz [1], 第 422 页), 从而条件期望算子在弱拓扑 $\sigma(L^1, L^\infty)$ 和 $\sigma(L^2, L^2)$ 下连续.

设一列随机变量 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 几乎必然收敛到可积随机变量 X. 我们的问题是对于任意的 σ-代数 $\mathcal{E}$, 条件期望 $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{E}]$ 是否几乎必然收敛到 $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$. Doob 证明了, 当 X_n 被某一个可积函数控制时, 结论成立. Blackwell 和 Dubins 在 [1] 中证明了这一条件不可能再放宽.

条件独立性

定理 45 的证明可以作为关于上述性质 1—7 的一个很好的练习.

43 **定义** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ 为 $\mathcal{F}$ 的三个子 σ-代数. 我们称 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_3$ 关于 $\mathcal{F}_2$ 条件独立, 如果

(43.1) $$\mathbb{E}[Y_1Y_3|\mathcal{F}_2] = \mathbb{E}[Y_1|\mathcal{F}_2]\mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2] \quad \text{p.s.}$$

其中 Y_1, Y_3 为关于相应的 σ-代数 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3$ 可测的非负随机变量.

44 **注** a) 取 $\mathcal{F}_2$ 为 σ-代数 $\{\varnothing, \Omega\}$, 则上述定义即为独立性的定义 (定义 33 和定义 34). 同样的, 我们可以定义多个 σ-代数关于给定 σ-代数的条件独立性.

b) 容易看出, 利用通常的单调类方法, 我们只需在定义中假设 (43.1) 当 Y_1 和 Y_3 为示性函数时成立.

45 **定理** 设 $\mathcal{F}_{12}$ 为由 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 生成的 σ-代数, 则 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_3$ 关于 $\mathcal{F}_2$ 条件独立当且仅当对任意 $\mathcal{F}_3$-可测的可积随机变量 Y_3,

(45.1) $$\mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_{12}] = \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2] \quad \text{p.s.}$$

证 a) (43.1)⇒(45.1). 我们想要验证 (45.1) 的左右两边在 $\mathcal{F}_{12}$ 中的任一元素上的积分相等. 首先 $\mathcal{F}_{12}$ 中满足这一性质的元素组成的集合对于运算 $(\cup md, \cap md)$ 封

①《拓扑向量空间》第 IV 章, 第二版, §4, 第 2 段, 性质 6 (第 103 页).

闭. 另一方面, 形如 $A_1 \cap A_2 (A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2)$ 的两两不相交的集合的有限并组成的集类 $\mathcal{C}$ 可以生成 $\mathcal{F}_{12}$, 从而由第 I 章定理 19, 我们只需验证

$$\mathbb{E}[a_1 a_2 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_{12}]] = \mathbb{E}[a_1 a_2 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2]],$$

其中 a_1, a_2 分别为 A_1 和 A_2 的示性函数, 我们有 (括号内的数字表示所用到的性质)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[a_1 a_2 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_{12}]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[a_1 a_2 Y_3|\mathcal{F}_{12}]] && (7)\\
&= \mathbb{E}[a_1 a_2 Y_3] && (5)\\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[a_1 a_2 Y_3|\mathcal{F}_2]] && (5)\\
&= \mathbb{E}[a_2 \mathbb{E}[a_1 Y_3|\mathcal{F}_2]] && (7)\\
&= \mathbb{E}[a_2 \mathbb{E}[a_1|\mathcal{F}_2]\mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2]] && (43.1)\\
&= \mathbb{E}[a_2 \mathbb{E}[(a_1 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2])|\mathcal{F}_2]] && (7)\\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(a_2 a_1 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2])|\mathcal{F}_2]] && (7)\\
&= \mathbb{E}[a_2 a_1 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2]]. && (5)
\end{aligned}$$

b) (45.1)⇒(43.1). 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_1 Y_2|\mathcal{F}_2] &= \mathbb{E}[Y_1 Y_3|\mathcal{F}_{12}|\mathcal{F}_2] && (6)\\
&= \mathbb{E}[(Y_1 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_{12}])|\mathcal{F}_2] && (7)\\
&= \mathbb{E}[(Y_1 \mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2])|\mathcal{F}_2] && (45.1)\\
&= \mathbb{E}[Y_1|\mathcal{F}_2]\mathbb{E}[Y_3|\mathcal{F}_2]. && (7)
\end{aligned}$$

第 III 章　测度论的补充知识

关于容度的 Choquet 定理之所以成为概率论中的一个重要工具, 要归功于 Hunt [1]. 我们将在第 2 节中证明这一定理, 它是本章的核心内容. 第 1 节包含证明 Choquet 定理和概率论中其他有用的结论 (例如 Blackwell 定理) 所必需的解析集理论基础知识. 第 3 节重点介绍有限 Radon 测度.

我们试图给出概率论和位势论中真正有用的结论 (只是在附录中有几个不那么基本的定理). 但是这并不意味着它们同等重要. 想直奔主题的读者可以只阅读第 1—13, 27—32 和 44 段.

§1　解析集

1　给定集合 E, 由 E 中包含空集在内的某些子集组成的集类称为 E 上的铺砌[①]. 设 E 为一集合, $\mathcal{E}$ 为 E 上的铺砌, 则二元组 $(E,\mathcal{E})$ 称为铺砌集. 这一术语仅在本章中使用并且某些应用依赖于它.

设 $(E_i,\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ 为一族铺砌集, $\mathcal{E}_i$ 的乘积铺砌 (相应的, 和铺砌[②]) 为 $\prod_{i\in I} E_i$ (相应的, $\sum_{i\in I} E_i$) 上的铺砌, 它包含形如 $\prod_{i\in I} A_i$ (相应的, $\sum_{i\in I} A_i$) 的子集, 其中对于所有的 i, $A_i \subset E_i$ 并且 A_i 属于 $\mathcal{E}_i$ (对于和的情形, 除去有限个指标, 都是空集 $\varnothing$).

在本书的第一版中我们给出乘积铺砌的另一定义. 它类似于和铺砌的定义, 我们要求除去有限个指标外, $A_i = E_i$. 由此推出, 当 $i = 0$ 时, 整个空间属于每一个乘积铺砌, 这会引起某些不便.

①译校者注: 铺砌 (一词) 原文为 pavage, 英文是 paving. 在有的中文文献中曾译为 "铺" (pū), 考虑到铺还有另一个读音 (pù), 意义完全不同, 为避免歧义, 改译为铺砌.

②回忆一下, E_i 的和 (记为 $\sum_{i\in I} E_i$ 或 $\coprod_{i\in I} E_i$) 就是全体形如 $E_i \times \{i\}$ 的集合的并集.

现在的定义会更合理一些. 在此提醒大家, 实际应用时我们只会用到可数乘积 (或和).

应当指出, 当 $\mathcal{E}_i$ 为 σ-代数时, $\mathcal{E}_i$ 的乘积铺砌并不等于 $\mathcal{E}_i$ 的乘积 σ-代数 (当 I 为可数时, 后者可以由乘积铺砌生成), 从而用 $\prod_{i\in I}\mathcal{E}_i$ 或 $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ 作为乘积铺砌的记号可能会引起歧义. 但我们还是决定用这样的记号, 当然仅限于本章[①].

紧铺砌和半紧铺砌

2 设 $(E,\mathcal{E})$ 为铺砌集, $(K_i)_{i\in I}$ 为 $\mathcal{E}$ 中的一族元素. 如果对于任意的有限子集 $I_0\subset I$, $\bigcap_{i\in I_0}K_i\neq\varnothing$, 那么称 $(K_i)_{i\in I}$ 满足有限交性质. 这说明 K_i 属于一个滤子, 或者由超滤子定理[②], 我们知道存在超滤子 $\mathcal{U}$ 使得对于所有的 $i\in I$, $K_i\in\mathcal{U}$.

3 **定义** *设 $(E,\mathcal{E})$ 为铺砌集, 若 $\mathcal{E}$ 中满足有限交性质的每一族 (相应的, 每一可数族) 元素的交非空, 则称 $\mathcal{E}$ 为紧 (相应的, 半紧) 铺砌*[③].

例如, 当 E 为可分拓扑空间时, E 中的紧子集组成的铺砌为紧铺砌. 下文中我们记这个铺砌为 $\mathcal{K}(E)$.

设 $\mathcal{E}$ 为 E 上的紧 (相应的, 半紧) 铺砌, 则 $\mathcal{E}\cup\{E\}$ 为紧 (相应的, 半紧) 铺砌.

在这一版中, 解析集的定义不使用半紧铺砌, 读者可以忽略关于半紧铺砌的内容. 之所以保留半紧铺砌纯粹是出于美学的考虑.

4 **定理** *设 E 为一个集合, $\mathcal{E}$ 为其上的紧 (相应的, 半紧) 铺砌. 设 $\mathcal{E}'$ 为 $\mathcal{E}$ 在运算 $(\cup f,\cap q)$ (相应的, $(\cup f,\cap d)$) 下的闭包, 则 $\mathcal{E}'$ 为紧 (相应的, 半紧) 铺砌.*

证 设 $\mathcal{F}$ 为包含 $\mathcal{E}$ 且对于运算 $(\cup f)$ 封闭的最小集类, 则 $\mathcal{E}'$ 为包含 $\mathcal{F}$ 且对于运算 $(\cap q)$ (相应的, $(\cap d)$) 封闭的最小集类. 由于第二个取闭包的过程仍然保持紧性, 我们只需证明 $\mathcal{F}$ 为紧 (相应的, 半紧) 铺砌. 考虑 $\mathcal{F}$ 中的一族 (相应的, 可数族) 满足有限交性质的元素 $(K_i)_{i\in I}$. 我们知道, 存在一个超滤子 $\mathcal{U}$, 使得对于所有的 i, $K_i\in\mathcal{U}$. 每一集合 K_i 可以表示为 $\mathcal{E}$ 中元素 K_{ij} 的并 $\cup_{j\in J_i}K_{ij}$, 其中 J_i 为一有限集, 从而存在一个指标 $j_i\in J_i$ 使得 $K_{ij_i}\in\mathcal{U}$[④]. $(K_{ij_i})_{i\in I}$ 满足有限交性质, 它们的交是非空的. 因此, $(K_i)_{i\in I}$ 的交非空. □

5 **定理** *设 $(E_i,\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ 为一族铺砌集. 若每一个 $\mathcal{E}_i$ 为紧 (相应的, 半紧) 铺砌, 则乘积铺砌 $\prod_{i\in I}\mathcal{E}_i$ 以及和铺砌 $\sum_{i\in I}\mathcal{E}_i$ 亦为紧 (相应的, 半紧) 铺砌.*

证 乘积铺砌的情形是显然的. 设 $\mathcal{H}$ 为 $\sum_{i\in I}E_i$ 上所有形如 $\sum_{i\in I}A_i$ 的子集组成的铺砌, 其中, A_i 属于 $\mathcal{E}_i$, 并且除去最多一个 i 外, $A_i=\varnothing$. 我们注意到和铺砌为

① 最好的处理方法是对于乘积 σ-代数使用记号 $\otimes$, 比如在 Neveu [1] 中.

② Bourbaki[2] (第三版), § 6, 第 4 段, 定理 1.

③ 这里有一个简单的非紧的半紧铺砌的例子: 在一不可数集上, 由所有有限子集和所有具有可数余集的子集组成的铺砌. 译校者注: 可数余集指该余集中仅包含可数个元素.

④ Bourbaki [2] (第三版), § 6, 第 4 段, 性质 5. 这一证明是 G. Mokobodzki 告诉我们的.

$\mathcal{H}$ 在运算 $(\cup f)$ 下的闭包, 从而它显然为紧 (半紧) 铺砌. □

在后面的定理中, 读者不需要将重点放在 "半" 紧铺砌上: 一般性的结果并不实用.

6 **定理** 设 $(E,\mathcal{E})$ 为铺砌集, f 为从 E 到 F 的映射. 假设对所有的 $x \in F$, 由 $f^{-1}(\{x\}) \cap A$, $A \in \mathcal{E}$ 组成的铺砌是半紧的, 则对 $\mathcal{E}$ 中任一递降元素列 $(A_n)_{n\in N}$, 有

$$f(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} f(A_n). \tag{6.1}$$

证 我们只需证明对每一个 $x \in \cap_n f(A_n)$, 存在 $y \in \cap_n A_n$ 使得 $f(y) = x$. 形如 $f^{-1}(\{x\}) \cap A_n$ 的集类满足有限交性质, 从而它们的交非空, 从中选取 y 即可. □

$\mathcal{F}$-解析集

7 **定义** 设 $(F,\mathcal{F})$ 为铺砌集, A 为 F 中的子集. 如果存在一个可度量化紧空间 E 以及 $E \times F$ 中属于 $(\mathcal{K}(E) \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 的一个子集 B, 使得 A 为 B 在 F 上的投影, 那么我们称 A 为一个 $\mathcal{F}$-解析集. F 上的所有 $\mathcal{F}$-解析集组成的铺砌记为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

由定义即得, 每一个 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ 被 $\mathcal{F}_\sigma$ 中的某一个元素所包含. 特别的, 空间 F 为 $\mathcal{F}$-解析集当且仅当它属于 $\mathcal{F}_\sigma$ (见下面的定理 8).

我们将在本章的附录中看到, 在定义 7 中, 用固定的紧空间 $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ ($\overline{\mathbb{N}}$ 为 $\mathbb{N}$ 的 Alexandrov 紧化) 甚至用 $\overline{\mathbb{R}}$ 代替可变的紧空间 E, 或者在另一种意义下, 使用任意一个半紧铺砌 $(E,\mathcal{E})$ (这是第一版中的定义), 我们得到同样的解析集类. 我们也会看到, $\mathcal{F}$-解析集可以通过对 $\mathcal{F}$ 中的元素应用 Souslin (A) 运算来构造.

8 **定理** $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$, 铺砌 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 在运算 $(\cup d, \cap d)$ 下封闭.

证 第一个结论显然成立. 为证明第二个结论, 我们考虑一列 $\mathcal{F}$-解析集 $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$. 由定义, 对每一自然数 n,

—— 存在可度量化紧空间 E_n 及其上的铺砌 $\mathcal{E}_n = \mathcal{K}(E_n)$.

—— 存在 $(\mathcal{E}_n \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 中的元素 $B_n \subset E_n \times F$ (从而它为 $(\mathcal{E}_n \times \mathcal{F})_\sigma$ 中元素 $(B_{nm})_{m\in\mathbf{N}}$ 的交), 使得它在 F 上的投影为 A_n.

设 E 为紧空间 $\prod_n E_n$, 铺砌 $\mathcal{E} = \prod_n \mathcal{E}_n \subset \mathcal{K}(E)$, π 为 $E \times F$ 到 F 上的投影运算. 记 C_n 为 B_n 在 $E \times F$ 中的柱集, 即 C_n 为 $(\prod_{n\neq m} E_m) \times B_n$[①], 则有 $\cap_n A_n = \pi(\cap_n C_n)$. 要证 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 在运算 $(\cap d)$ 下封闭, 只需证明 $\cap_n C_n$ 属于 $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 由于每个 C_n 属于 $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$, 这显然成立.

设 E 为和拓扑空间 $\sum_n E_n$ 的 Alexandrov 紧化, 其上的紧铺砌 $\mathcal{E} = \sum_n \mathcal{E}_n \subset \mathcal{K}(E)$. 设 π 为 $E \times F$ 到 F 上的投影运算, 则 $\pi(\sum_n B_n) = \cup_n A_n$ (将 $(\sum_n E_n) \times F$

① 这一记号有明显的缺点 (集合乘积的 "交换性").

与 $\sum_n(E_n \times F)$ 视为同一个集合). 我们只需证明 $\sum_n B_n \in (\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$. 这一集合等于 $\bigcap_m \sum_n B_{nm}$, 并且 $\sum_n B_{nm}$ 属于 $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_\sigma$, 从而 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 在运算 $(\cup d)$ 下封闭. □

定理 9 a) 设 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 为两个铺砌集, 我们有

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) \times \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}).$$

b) 设 E 为可度量化紧空间, $\mathcal{E} = \mathcal{K}(E)$, A' 为 $\mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ 中的任意一个元素, 则 A' 在 F 上的投影 A 为 $\mathcal{F}$-解析集.

证 设 A 和 B 分别为 $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中的元素; A_1 和 B_1 分别为 $\mathcal{E}_\sigma$ 和 $\mathcal{F}_\sigma$ 中的元素, 满足 $A \subset A_1, B \subset B_1$. 显然我们有 $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \times \mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$, 从而 $\mathcal{A}(\mathcal{E}) \times \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. 同理, $\mathcal{E}_\sigma \times \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ (定理 8). 所以

$$A \times B = (A \times B_1) \cap (A_1 \times B) \in \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}).$$

从而 a) 成立.

下面我们来证明 b): 由于 A' 属于 $\mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$, 从而存在一个可度量化紧空间 G, 其上定义了铺砌 $\mathcal{G} = \mathcal{K}(G)$, 以及 $G \times (E \times F)$ 中属于 $(\mathcal{G} \times (\mathcal{E} \times \mathcal{F}))_{\sigma\delta}$ 的一个子集 A'', 使得 A' 为 A'' 在 $E \times F$ 上的投影. 我们注意到铺砌 $\mathcal{G} \times \mathcal{E}$ 包含于 $\mathcal{K}(G \times E)$ 中, 并且 A'' 为 $((\mathcal{G} \times \mathcal{E}) \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 中的元素, 其在 F 上的投影为 A. □

定理 10 设 $(F, \mathcal{F})$ 为铺砌集, $\mathcal{G}$ 为满足 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ 的铺砌, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{F})$. 特别的, 如果 $\mathcal{G}$ 为包含 $\mathcal{F}$ 且对于运算 $(\cup d, \cap d)$ 封闭的最小集类, 那么 $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

证 显然, 我们有 $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \supset \mathcal{A}(\mathcal{G}) \supset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. 若 A 为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$-解析集, 则存在一个可度量化紧空间 E 及其上的铺砌 $\mathcal{E} = \mathcal{K}(E)$ 和 $(\mathcal{E} \times \mathcal{A}(\mathcal{F}))_{\sigma\delta}$ 中的元素 A', 使得 A 为 A' 在 F 上的投影. 我们有 $\mathcal{E} \times \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E}) \times \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ (定理 9). 从而 $A' \in \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ (定理 8). 应用定理 9.b), 我们得到 A 属于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. □

更一般的, 我们有:

定理 11 设 $(F, \mathcal{F})$ 和 $(G, \mathcal{G})$ 为两个铺砌集, 从 F 到 G 的映射 f 满足 $f^{-1}(\mathcal{G})$ 包含于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中, 则 $f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{G}))$ 包含于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中.

证 设 A 为 $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ 中的元素, E 为可度量化紧空间, 其上的铺砌 $\mathcal{E} = \mathcal{K}(E)$, 那么存在集合 $B \in (\mathcal{E} \times \mathcal{G})_{\sigma\delta}$, 其在 G 上的投影为 A. 记 h 为从 $E \times F$ 到 $E \times G$ 的映射 $(x, y) \mapsto (x, f(y))$. 集合 $C = h^{-1}(B)$ 显然属于 $(\mathcal{E} \times \mathcal{A}(\mathcal{F}))_{\sigma\delta} \subset (\mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}))_{\sigma\delta} = \mathcal{A}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ (定理 9 和定理 8). 由于集合 $f^{-1}(A)$ 为 C 在 F 上的投影, 由定理 9 可知它为 $\mathcal{F}$-解析集. □

定理 12 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 包含 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ 当且仅当 $\mathcal{F}$ 中每一个元素的余集为 $\mathcal{F}$-解析集.

证 必要性显然. 为证明充分性, 我们考虑 $\mathcal{F}$ 中本身及其余集均为 $\mathcal{F}$-解析集的所有元素组成的集类 $\mathcal{J}$. 显然, $\mathcal{J}$ 为包含于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中的 σ-代数并且 $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$, 从而 $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. □

作为定理 9 和定理 12 的简单推论, 我们给出概率论中经常出现的某些 (投影) 集合的解析性质. 记 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-代数, $\mathcal{K}$ 为 $\mathbb{R}$ 中所有紧子集组成的铺砌. 事实上, $\mathbb{R}$ 可以换成任何具有可数基的局部紧空间 (特别的, 任何可度量化紧空间).

13 **定理** 1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{K})$, $\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{K})$.

2) 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, 则 $\mathbb{R} \times \Omega$ 上的乘积 σ-代数 $\mathcal{G} = \mathcal{B} \times \mathcal{F}$ 包含于 $\mathcal{A}(\mathcal{K} \times \mathcal{F})$ 中.

3) $\mathcal{G}$ 中 (或更一般的, $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ 中) 的元素在 Ω 上的投影为 $\mathcal{F}$-解析集.

证 注意到 $\mathbb{R}$ 中任意一个紧子集的余集可以表示为可数个紧子集的并, 而 σ-代数 $\mathcal{B}$ 可以由 $\mathcal{K}$ 生成: 由定理 12, 我们有 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathcal{K})$, 从而由定理 10, $\mathcal{A}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K})$. 最终, 我们得到 $\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{K})$. 类似的, 乘积铺砌 $\mathcal{K} \times \mathcal{F}$ 可以生成 σ-代数 $\mathcal{G}$ 并且 $\mathcal{K} \times \mathcal{F}$ 中任一元素的余集可以表示为 $\mathcal{K} \times \mathcal{F}$ 中可数个元素的并. 于是 $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}(\mathcal{K} \times \mathcal{F})$ (事实上, 如上所述, $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{K} \times \mathcal{F})$). 最后, 3) 可以由定理 9 推得. □

我们已经为证明和应用关于容度的 Choquet 定理做好铺垫, 但是本节并不打算到此为止. 首先我们将给出解析集的分离定理, 这是本节中最后一个 "抽象" 的结论. 然后我们考虑某些特殊拓扑空间中的解析集, 此时利用分离定理可以得到简单但是十分有用的结论 (Souslin-Lusin 定理, Blackwell 定理).

分离定理

这里有两个证明可供读者选择: 第一个证明是 "初等的" 但是有些繁琐. 另一证明我们将在第 43 段中给出, 从第二个证明中读者可以看出分离定理是可容性的一种特殊情况 (这里给出的是 Sion 的一个想法的简化版本). 两个证明本质上是相同的.

14 设 $(F, \mathcal{F})$ 是一个铺砌集, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}$ 在运算 $(\cup d, \cap d)$ 下的闭包. 例如, 当 F 为具有可数基的局部紧空间并且 $\mathcal{F}$ 为 F 中的紧子集组成的铺砌时, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 为 Borel σ-代数.

给定 F 中的两个子集 A 和 A', 如果存在 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 中两个不相交的元素分别包含 A 和 A', 那么称 A 和 A' 被 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 中的元素所分离.

定理 *设 $\mathcal{F}$ 为半紧铺砌, A 和 A' 为两个不相交的 $\mathcal{F}$-解析集, 则 A 和 A' 可以被 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 中的元素所分离.*

证 为了简化证明, 我们假设 $F \in \mathcal{F}$. 读者稍加思索就会看出这一附加条件不会弱化结论.

首先我们给出一个辅助结论: 若 (C_n) 和 (D_n) 为 F 中的两个子集列, 满足对每一对 (n,m), C_n 和 D_m 可以被 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 中的元素所分离, 则 $\cup_n C_n$ 和 $\cup_m D_m$ 可分离. 对每一对 (n,m), 选取 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 中的元素 E_{nm} 和 F_{nm} 使得 $C_n \subset E_{nm}$, $D_m \subset F_{nm}$, $E_{nm} \cap F_{nm} = \varnothing$. 设

$$E' = \bigcup_n \bigcap_m E_{nm}, \quad F' = \bigcup_p \bigcap_n F_{np},$$

我们得到这些集合均属于 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$, 并且有 $\cup_n C_n \subset E'$, $\cup_m D_m \subset F'$ 以及 $E' \cap F' = \varnothing$.

有了这一引理后, 考虑两个不相交的 $\mathcal{F}$-解析集 A 和 A'. 通过构造乘积空间的办法, 我们可以假设存在一个可度量化紧空间 E 以及其上的铺砌 $\mathcal{E} = \mathcal{K}(E)$, 使得 A 和 A' 分别为如下两个集合的投影:

$$J = \bigcap_n \bigcup_m J_{nm}, \quad J' = \bigcap_n \bigcup_m J'_{nm},$$

其中集合 $J_{nm} = E_{nm} \times F_{nm}$, $J'_{nm} = E'_{nm} \times F'_{nm}$ 均属于 $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. 简单起见, 我们称 $E \times F$ 中的两个子集可分离, 如果它们在 F 上的投影可以被 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ 中的元素所分离. 假设 J 和 J' 不可分离, 我们可以推出 A 和 A' 的交集非空, 这与假设矛盾.

设 $m_1, m_2, \cdots, m_i$ 为整数, 记

$$L_{m_1 m_2 \cdots m_i} = J_{1m_1} \bigcap J_{2m_2} \bigcap \cdots \bigcap J_{im_i} \bigcap \Big(\bigcap_{n>i} \bigcup_m J_{nm}\Big).$$

$L'_{m'_1 m'_2 \cdots m'_i}$ 可以类似定义. 因为 $J = \cup_{m_1} L_{m_1}$, $J' = \cup_{m'_1} L'_{m'_1}$ 并且 J 和 J' 不可分离, 所以由上述引理可以推出存在两个整数 m_1 和 m'_1 使得 L_{m_1} 和 $L'_{m'_1}$ 不可分离. 但是 $L_{m_1} = \cup_{m_i} L_{m_1 m_i}$, $L'_{m'_1} = \cup_{m'_i} L'_{m'_1 m'_i}$, 从而存在两个整数 m_2 和 m'_2 使得 $L_{m_1 m_2}$ 和 $L'_{m'_1 m'_2}$ 不可分离. 于是我们可以递归构造出两个无穷序列 $m_1, m_2, \cdots$ 和 $m'_1, m'_2, \cdots$ 使得对于任意的 i, $L_{m_1 m_2 \cdots m_i}$ 和 $L'_{m'_1 m'_2 \cdots m'_i}$ 不可分离.

因为 $E \times F$ 中的每一子集和空集是可分离的 (此处用到假设 $F \in \mathcal{C}(\mathcal{F})$), 所以这些集合不可能为空集. 因此,

$$E_{1m_1} \cap E_{2m_2} \cap \cdots \cap E_{im_i} \neq \varnothing, \quad E'_{1m'_1} \cap E'_{2m'_2} \cap \cdots \cap E'_{im'_i} \neq \varnothing.$$

同理,

$$(F_{1m_1} \cap F_{2m_2} \cap \cdots \cap F_{im_i}) \cap (F'_{1m'_1} \cap F'_{2m'_2} \cap \cdots \cap F'_{im'_i}) \neq \varnothing.$$

因为上述括号内的两个集合均属于 $\mathcal{C}(\mathcal{F})$, $L_{m_1 m_2 \cdots m_i}$ 和 $L'_{m'_1 m'_2 \cdots m'_i}$ 不可分离, 铺砌 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 均为半紧, 所以存在 $x \in \cap_i E_{im_i}$, $x' \in \cap_i E'_{im'_i}$ 和 $y \in \cap_i (F_{im_i} \cap F'_{im'_i})$. 于是 $(x,y) \in J$, $(x',y) \in J'$. 最终, 我们得到 $y \in A \cap A'$, 矛盾. □

可测 Souslin 空间及其他

15 至今为止, 我们仅涉及铺砌集 $(F,\mathcal{F})$ 中的 $\mathcal{F}$-解析子集: "A 为 $\mathcal{F}$-解析集" 并未表现出集合 A 的内蕴性质, 而是给出 A 在更大的集合内 "所处位置" 的某些信息. 我们稍微换一个角度: 设 $(F,\mathcal{F})$ 为可测空间, 我们将通过可测空间 $(A,\mathcal{F}|_A)$ 的内蕴性质来研究 F 中的子集 A. 在第 3 节中我们将从拓扑的角度加以考虑.

我们感谢严加安对这一部分的意见和建议: 事实上, 下面的表述方式正是建立在他的一项研究成果之上.

下面我们简单回顾一下几个概念.

给定两个可测空间 $(E,\mathcal{E})$ 和 $(F,\mathcal{F})$, 如果存在从 E 到 F 的双射, 其本身及逆映射均可测, 那么称 $(E,\mathcal{E})$ 和 $(F,\mathcal{F})$ 同构. 给定空间 $(F,\mathcal{F})$, 如果 $\mathcal{F}$ 的原子为 F 中的点, 那么称 $(F,\mathcal{F})$ 为分离空间. 可分且分离的可测空间 $(F,\mathcal{F})$ 同构于空间 $(U,\mathcal{B}(U))$, 其中 U 为 $\mathbb{R}$ 中的子集 (第 I 章第 11 段).

我们省略如下引理的证明, 它由解析集的定义直接可得.

引理 *设 $(F,\mathcal{F})$ 为铺砌集, E 为 F 中的子集, $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{F}$ 在 E 上的限制, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ 等于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 在 E 上的限制.*

给定拓扑空间 E, 分别记 $\mathcal{K}(E),\mathcal{G}(E),\mathcal{B}(E)$ (或更简洁的, $\mathcal{K},\mathcal{G},\mathcal{B}$) 为 E 中的紧子集、开集、Borel 集组成的铺砌. 当 E 可度量化时, 由于开集的余集为 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 从而 $\mathcal{G}\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{A}(\mathcal{G})$ (定理 12) 并且 $\mathcal{A}(\mathcal{B})=\mathcal{A}(\mathcal{G})$ (定理 10). 我们将铺砌 $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ 记为 $\mathcal{A}(E)$ 或 $\mathcal{A}$, 其中的元素称为 E 中的解析集. 对于可度量化空间的情形[1], 同样可以定义 f-解析集, 其中 f 为 E 中闭子集组成的铺砌. 当 E 为紧空间 (或具有可数基的局部紧空间) 时, 我们同样可以定义 $\mathcal{K}$-解析集.

16 **定义** a) *若可度量化拓扑空间同胚于一个可度量化紧空间中的 Borel 子集 (相应的, 解析子集、解析子集的余集), 则称之为 Lusin (相应的, Souslin, 余 Souslin) 可度量化拓扑空间.*

b) *若可测空间 $(F,\mathcal{F})$ 同构于可测空间 $(H,\mathcal{B}(H))$, 其中 H 为 Lusin (相应的, Souslin, 余 Souslin) 可度量化空间, 则称 $(F,\mathcal{F})$ 为 Lusin (相应的, Souslin, 余 Souslin) 可测空间.*

c) *设集合 E 为分离可测空间 $(F,\mathcal{F})$ 中的子集, 若可测空间 $(E,\mathcal{F}|_E)$ 为 Lusin (相应的, Souslin, 余 Souslin) 可测空间, 则称 E 为 Lusin (相应的, Souslin, 余 Souslin) 集. 记 $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, $\mathcal{S}(\mathcal{F})$, $\mathcal{S}'(\mathcal{F})$ 分别为 $(F,\mathcal{F})$ 中的 Lusin 集, Souslin 集, 余 Souslin 集组成的铺砌.*

Lusin 可度量化 (相应的, 可测) 空间既为 Souslin 可度量化 (相应的, 可测) 空间又为余 Souslin 可度量化 (相应的, 可测) 空间 (定理 12). 我们将在随后看到其逆亦

[1] 对于非可度量化的情形, 至少有 5 种解析集的定义, 我们暂不考虑.

为真. 每一个 Lusin, Souslin 或余 Souslin 可度量化 (相应的, 可测) 空间为可分的分离空间.

介绍余 Souslin 空间并非多余. 我们将在第 IV 章看到, 通常的轨道空间或为 Lusin 空间, 或为余 Souslin 空间.

我们将在定义 67 中给出 Lusin (相应的, Souslin) 拓扑空间的一般定义: 这些空间仍为分离空间但未必可度量化. 然而, 它们的 Borel σ-代数为 b) 中意义下的 Lusin (相应的, Souslin) σ-代数.

首先我们给出 Lusin 等可测空间的结构 (在定理 19 中将做详细介绍) 和最常见的非紧 Lusin 可度量化空间的例子.

定理 *设 $(F, \mathcal{F})$ 为可测空间. 若 F 为 Lusin 可测空间, 则 $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathcal{F})$. 若 F 为 Souslin 可测空间, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{F})$. 若 F 为余 Souslin 空间, 则 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中每一元素的余集属于 $\mathcal{S}'(\mathcal{F})$.* 17

所有的波兰空间都是 Lusin 空间 (对于波兰空间中的任意一个 Borel 子空间, 结论仍成立).

证 我们可以假设 F 为可度量化紧空间 C 中的子集, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{B}(C)$ 在 F 上的限制. 于是 Lusin 可测空间的情形显然成立. 其余两种情形可以简化为第 15 段中的引理: $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{A}(C)$ 在 F 上的限制.

对于定理的第二部分, 我们采用 Bourbaki 的方法. 设 P 为完备可分度量空间, 我们将 P 作为拓扑 (而非度量) 子空间嵌入到某个可度量化紧空间 C (例如 $[0,1]^{\mathbb{N}}$) 中. 如果 $x \in \overline{P}$ 具有一个在 P 上限制的直径 (在 P 的度量下) 小于 $1/n$ 的邻域, 那么我们记 $x \in U_n$. U_n 为 $\overline{P}$ 中的开集, 从而它为 C 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集. 因为 P 完备并且等于 $\cap_n U_n$, 所以 P 为 C 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集. □

反之, 我们可以证明可度量化紧空间中的任何 $\mathcal{G}_\delta$ 集为波兰空间 (Bourbaki [3], Top. Gén., 第 IX 章, § 6, 第 1 节, 定理 1).

与定理 9 相比较, 下面关于直接映像的定理非常有用, 但是它不如定理 21 和 26 深刻. 我们注意到它的证明中并未用到分离定理. a) 和 b) 为技术性的引理, 定理中重要的部分是 c) 和 d).

定理 *设 $(F, \mathcal{F})$ 和 $(F', \mathcal{F}')$ 为两个可分的分离可测空间. 假设 F 和 F' 可以嵌入到紧度量空间 C 和 C' 中*[①]*, 并且 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(C)|_F$, $\mathcal{F}' = \mathcal{B}(C')|_{F'}$. 若 f 为从 F 到 F' 的可测映射, 则* 18

a) f 可以延拓为从 C 到 C' 的 Borel 映射 g.

b) 如果 f 还是从 F 到 F' 间的同构, 那么存在 C 和 C' 中的 Borel 子集 $B \supset F$, $B' \supset F'$, 使得 g 为 B 和 B' 之间的同构.

[①]这个假设是不失一般性的, F 和 F' 总可以嵌入到区间 $[0,1]$ 中 (第 I 章第 11 段).

c) 对所有的 $A \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$, 有 $f(A) \in \mathcal{S}(\mathcal{F}')$.

d) $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(F)$. $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}(F)$ 当且仅当 F 为 Souslin 空间. 特别的, 若 F 为 Souslin 空间, 则 $f(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}')$.

证 a) 设 i 为从 F 到 C 的典则嵌入映射, 则 $\mathcal{B}(F) = \mathcal{T}(i)$. 于是作为从 F 到 C' 的映射, f 是 $\mathcal{T}(i)$-可测的. 由第 I 章第 18 段, 存在从 C 到 C' 的 Borel 映射 g 使得 $f = g \circ i$, g 即为所求的扩张映射.

b) 类似的, 如果 f 为 Borel 同构, 那么从 F' 到 F 的逆映射 $f' = f^{-1}$ 可以扩张为从 C' 到 C 的 Borel 映射 g'. 我们只需取 $B = \{x \in C : g'(g(x)) = x\}$, $B' = \{x' \in C' : g(g'(x')) = x'\}$ (第 I 章定理 12), 则所求的同构为 $g|_B$, 其逆同构为 $g'|_{B'}$.

c) 我们回到 a) 的情形. g 的图像 G 属于乘积 σ-代数 $\mathcal{B}(C) \times \mathcal{B}(C')$ (第 I 章定理 12), 从而它为 $\mathcal{K}(C) \times \mathcal{K}(C')$-解析集 (定理 13). 如果 $(F, \mathcal{F})$ 自身为 Souslin 可测空间, 我们取 C 和嵌入同构使得 $F \in \mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(\mathcal{K}(C))$, 由 Souslin 可测空间的定义, 这是可行的, 那么 $(F \times C') \cap G$ 为 $\mathcal{K}(C) \times \mathcal{K}(C')$-解析集 (定理 9.a)). 投影到 C' 上, 我们看到 $g(F) = f(F)$ 为 C' 中的解析集 (定理 9.b)). 由于 C' 为紧度量空间, $f(F)$ 为包含于 F' 中的 Souslin 可测空间, 从而 $f(F) \in \mathcal{S}(\mathcal{F}')$. 另一方面, $f(F)$ 为包含于 F' 中的 $\mathcal{A}(C')$-解析集, 从而它属于 $\mathcal{A}(\mathcal{F}')$ (第 15 段).

若 $A \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$, 对 $f|_A$ 应用上述结果即知 $f(A)$ 属于 $\mathcal{S}(\mathcal{F}') \cap \mathcal{A}(F')$.

d) 用同样的记号, 我们来证明 $\mathcal{S}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{A}(F')$. 设 $B \in \mathcal{S}(\mathcal{F}')$, 由 Souslin 空间的定义, 存在可度量化紧空间 C 以及 C 中的解析子集 F, 以及从 F 到 B 的 Borel 同构 f. 于是我们有 $B \in \mathcal{S}(\mathcal{F}') \cap \mathcal{A}(F')$, 从而 $B \in \mathcal{A}(F')$. 当 F' 为 Souslin 空间时, 由定理 17 看出 $\mathcal{A}(F') \subset \mathcal{S}(\mathcal{F}')$, 因此它们相等. 反之, 若 $\mathcal{S}(\mathcal{F}') = \mathcal{A}(F')$, 则由 $F' \in \mathcal{A}(F')$ 得到 F' 为 Souslin 空间. □

下面的定理重述了第 18 段中的 d), 对于 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{S}'(\mathcal{E})$ 给出类似的结论. 这个结果的重要性必须在这里强调一下. 例如, A 属于 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 是可测空间 $(A, \mathcal{A})$ 的一个内蕴性质, 其中 σ-代数 $\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{E}$ 在 A 上的限制. 另一方面, A 属于 $\mathcal{E}$ 反映出集合 A 在 E 中的位置性质. 从而结论 1) 告诉我们: 可测空间 $(A, \mathcal{A})$ 以任意方式嵌入到更大的空间 $(E, \mathcal{E})$ 中的时候, A 都属于 σ-代数 $\mathcal{E}$. 对于 2) 和 3) 有同样的结论[①].

为了记号上的简洁, 我们记 $\mathcal{A}'(\mathcal{E})$ 为 E 中余集为 $\mathcal{E}$-解析集的子集组成的铺砌.

19 **定理** 设 $(E, \mathcal{E})$ 为可分的分离可测空间. 我们有

1) $\mathcal{L}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$, 当且仅当 E 为 Lusin 空间时等号成立.

2) $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{E})$, 当且仅当 E 为 Souslin 空间时等号成立.

3) $\mathcal{S}'(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}'(\mathcal{E})$, 当且仅当 E 为余 Souslin 空间时等号成立.

---

①将这一结论与定理 17 中关于拓扑的结论相比较: 将波兰空间 P 嵌入到可度量化紧空间 K 中, P 必为 K 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集.

证 我们利用定理 18, 取 $F' = E$. 由定义, 如果 $A \subset E$ 属于 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ (相应的, $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, $\mathcal{S}'(\mathcal{E})$), 那么存在可度量化紧空间 C 以及 C 中的 Borel 子集 (相应的, C 中的解析集、C 中的解析集的余集) F 和从 F 到 $A \subset E = F'$ 的 Borel 同构 f. 由定理 18.b), f 可以延拓为 B 和 B' 之间的同构 g, 其中 B 和 B' 为 C 和 C' 中的 Borel 子集. 所以 $g(F) = A$ (通过简单的结构变换) 为 B' 中的 Borel 集 (相应的, 解析集、解析集的余集), 并且它包含于 $E = F'$ 中, 因此 F' 属于 $\mathcal{E}$ ($\mathcal{A}(\mathcal{E}), \mathcal{A}'(\mathcal{E})$)[1]. 定理中余下的部分显然成立. □

注 a) 利用第 I 章第 11 段, 我们可以将可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 视为区间 $[0,1]$ 中的子集, 仍记为 E (并带有它的 Borel σ-代数). 由定理 19, $\mathcal{L}(\mathcal{E}), \mathcal{S}(\mathcal{E}), \mathcal{S}'(\mathcal{E})$ 中的元素可以表示为包含于 E 中的 $[0,1]$ 中的 Borel 集、解析集、解析集的余集. 我们即得 E 上的这些铺砌对于运算 $(\cup d, \cap d)$ 封闭. 进一步, 如果 E 既为 Souslin 空间又为余 Souslin 空间, 那么它在 $[0,1]$ 中既为解析集又为解析集的余集. 从而由分离定理, 它为 $[0,1]$ 中的 Borel 集, 因此 E 为 Lusin 空间. 20

b) 在以后的叙述中, 我们给出定理 19 的简单推论, 而不涉及 "余 Souslin" 的情形.

定理 1) 每一个 Lusin (Souslin) 可测空间同构于 $[0,1]$ 中的一个 Borel (解析) 子集.

2) 每一个 Lusin (Souslin) 可度量化空间同胚于立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 中的一个 Borel (解析) 子空间.

证 由第 I 章第 11 段和定理 19 即得到 1). 对于 2), 将空间嵌入到立方体中并且利用定理 19, 即得到结论. □

事实上, 任意一个不可数的 Lusin 可测空间同构于整个区间 $[0,1]$ (见本章附录).

Souslin-Lusin 定理

为了应用定理 19, 我们必须知道空间 E 中给定的子集 A 是否属于 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$: 这意味着可以在 A 和某个已知的 Lusin 空间 L 之间建立一个可测的双射 f 并且其逆映射也可测. Souslin-Lusin 定理可以使我们不用去担心 f^{-1}, 这是测度论中的一种必杀技, 只要有机会 (哪怕是看上去并不起眼的问题) 我们就会用上它. ㉑

定理 设 $(F, \mathcal{F})$ 和 $(F', \mathcal{F}')$ 为两个可分的分离可测空间, h 为从 F 到 F' 的可测单射.

1) 若 F 为 Souslin 空间, 则 h 为从 F 到 $h(F)$ 的同构.

2) 进一步, 若 F 为 Lusin 空间, 则 $h(\mathcal{F}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}'$.

[1] 译校者注: 此处原文有误, 根据严加安先生的意见修改.

证　由第 I 章第 11 段, 不失一般性, 我们可以假设 $(F', \mathcal{F}')$ 为区间 $[0,1]$ 及其上的 Borel σ-代数. 设 $A \in \mathcal{F}$, 集合 $h(A)$ 和 $h(A^c)$ 为 Souslin 集 (第 18 段), 由于 h 为单射, 从而它们无交. 因为 $[0,1]$ 中的 Souslin 子集为 $\mathcal{K}$-解析集, 由分离定理 14, $h(A)$ 和 $h(A^c)$ 可以被 $[0,1]$ 中的两个 Borel 子集 B 和 B' 所分离. 于是 $h^{-1}(B)$ 和 $h^{-1}(B')$ 为 $\mathcal{F}$ 中的元素并且它们分离 A 和 A^c, 进而 $A = h^{-1}(B)$, $A^c = h^{-1}(B')$, $h(A) = B \cap h(F)$. 因此 $h(A) \in \mathcal{F}'$. 这意味着 h 为可测同构. 定理中的其余部分可以由定理 19 的 1) 推得. □

f 为单射的假设可以弱化到何种程度? 我们不加证明地给出定理 21 的一个推广 (参见 Hausdorff [1]), 这个定理归功于 Lusin, 但是证明要困难得多.

21a　　**定理**　*在与定理 21 相同的假设下, 若 F 为 Lusin 空间并且对于所有的 $y \in F'$, $h^{-1}(\{y\})$ 至多可数, 则 $\mathcal{F}$ 中的每一元素在 h 下的像在 F' 中可测, 并且存在 F 的一个可数分划 (F_n), 其中 F_n 为可测集, 使得 h 在每个 F_n 上为单射.*

另一方面, 如果不要求 $\mathcal{F}$ 中的每个元素在 h 下的像都可测, 而仅要求 $h(F)$ 可测, 那么我们有如下的定理, 归功于 Novikov 和 Kunugui (相应的, Arsenin, Čegolkov 和 Čoban). 我们用拓扑学的语言给出.

21b　　**定理**　*设 F 和 F' 为两个可度量化可分空间, h 为 F 到 F' 上的 Borel 映射. 如果 F 为 Lusin 空间并且对所有的 $y \in F'$, $h^{-1}(\{y\})$ 为 F 中的紧集 (相应的, 更一般的, 为 F 中可数个紧子集的并), 那么 $h(F)$ 为 F' 中的 Borel 集. 进一步, 存在 F 中的 Borel 子集 B, 使得 h 在 B 上的限制为单射并且其像等于 $h(F)$*①.

可以利用 "第二" 分离定理来证明这个并不显然 (相应的, 困难) 的定理, 我们将在附录中讨论.

下面为定理 21 的一个推论. 特别有用的是在证明后面的注中我们给出的形式. 我们用拓扑学的语言叙述.

22　　**定理**　*设 Ω 和 E 为两个可度量化可分空间, f 为从 Ω 到 E 的映射. 如果 f 的图像为 $\Omega \times E$ 中的 Souslin 子空间, 那么 Ω 为 Souslin 空间并且 f 为从 Ω 到 E 的 Borel 映射.*

证　设 G 为 f 的图像, π 为从 $\Omega \times E$ 到 Ω 的投影. 由定理 18.c), Ω, 即 $\pi(G)$ 为 Souslin 空间. 进一步, 因为 π 在 G 上的限制为从 G 到 Ω 的 Borel 单射, 所以由定理 21, 可测空间 G 和 Ω 同构. 当 B 为 E 中的 Borel 子集时, $f^{-1}(B)$ 等于 G 中的 Borel 子集 $G \cap (\Omega \times B)$ 在 Ω 上的投影, 从而它为 E 中的 Borel 子集. 因此 f 为 Borel 映射. □

---

①英译本注: 在 21b 中, 紧集还可以替换成 K_σ 集. 参见 Saint-Raymond, Bull. Soc. Math. France, 104, 1976, 第 389–400 页.

注 设 Ω 和 E 为 Souslin 空间: 它们可以作为解析子空间嵌入到可度量化紧空间 K 和 L 中. 于是 $\Omega \times E$ 为 $K \times L$ 中的解析子空间 (定理 9.a)) 并且可测空间 $(\Omega \times E, \mathcal{B}(\Omega \times E))$ 为 Souslin 可测空间. 这样 $\mathcal{B}(\Omega \times E) \subset \mathcal{A}(\mathcal{B}(\Omega \times E))$ 中的每一元素为 Souslin 空间 (定理 18.d)). 因此:

如果 Ω 和 E 为 Souslin 空间, 且 f 的图像为 $\Omega \times E$ 中的 Borel 子集, 那么 f 为 Borel 映射. 这是第 I 章定理 12.b) 的逆命题.

现在我们回到分离定理, 它是证明定理 21 的关键工具. 我们给出一个非常简单的修正, 把定理 14 中的 "紧性" 假设去掉. 这一定理我们在后面并未用到. 读者也可以参考定理 68 的注.

定理 *设 $(F, \mathcal{F})$ 为可分的分离可测空间, 若 A 和 A' 为 $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ 中的两个不相交的元素, 则存在 $\mathcal{F}$ 中的两个不相交的元素 B 和 B', 使得 $A \subset B$, $A' \subset B'$.* 23

证 我们将 F 嵌入到可度量化紧空间 C 中, 由第 18 段, A 和 A' 为两个 $\mathcal{K}(C)$-解析集. 由第 14 段, 它们可以被 C 中的两个 Borel 子集所分离, 其在 F 上的限制即为所求. □

Blackwell 空间

本节中所用到的基本定义 (原子, 伴随分离空间, ……) 读者可以参考第 I 章第 9 和 10 段.

Blackwell 空间由 Blackwell 在 [1] 中以 Lusin 空间的称谓引入. 这当然会引起混淆, 所以我们把它换成现在的说法 (Blackwell 空间这一称谓本身也被某些作者在略微不同的意义下使用, 我们的用法合乎大多数人的习惯).

定义 *如果可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 的伴随分离空间 $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}})$ 为 Souslin 可测空间, 那么称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为 Blackwell 空间.* 24

定理 *$(\Omega, \mathcal{F})$ 为 Blackwell 空间当且仅当 $\mathcal{F}$ 可分并且如下性质成立:* 25

(25.1) *对于从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $\mathbb{R}$ 的每一个可测映射 f 和每一个 $A \in \mathcal{F}$, 像集 $f(A)$ 为 $\mathbb{R}$ 中的解析集.*

证 我们可以简化为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为分离空间的情形. 这样, 称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 是 Blackwell 空间相当于说它是 Souslin 空间. 首先, 如果 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为 Souslin 空间, 那么我们可以看出 $\mathcal{F}$ 可分并且 (25.1) 成立 (第 18 段). 反之, 如果 $\mathcal{F}$ 为可分且分离的, 那么存在从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $\mathbb{R}$ 中某一子集上的同构 f (第 I 章第 11 段), 由 (25.1), 我们知道它为解析集, 从而 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为 Souslin 空间. □

下面的定理非常有用, 我们以后称它为 Blackwell 定理: 它把比较 Blackwell σ-代数化归为对相应的原子作比较.

定理 *设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为 Blackwell 空间, $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数, $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{F}$ 的可分子 σ-代* 26

数, 则 $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$ 当且仅当 $\mathcal{G}$ 的每一原子可以表示为 $\mathcal{S}$ 中原子的并集.

特别的, 一个 $\mathcal{F}$-可测的实函数 g 为 $\mathcal{S}$-可测的当且仅当 g 在 $\mathcal{S}$ 中的每一个原子上为常数.

证 我们只需证明第一部分, 定理的第二部分取 $\mathcal{G} = \mathcal{T}(g)$ 即证.

条件显然是必要的. 为了说明它也是充分的, 我们取 $\mathcal{G}$ 中的任一元素 B. 记 $\mathcal{J}$ 为 $\mathcal{S}$ 和 B 生成的 σ-代数. $\mathcal{J}$ 作为 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数是可分的并且它满足 (25.1), 从而 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为 Blackwell 空间. 另一方面, 两个 σ-代数 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{J}$ 决定了 Ω 上相同的等价关系. 通过取商空间, 我们的问题化归为证明 Souslin 空间 $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}})$ 映到 Souslin 空间 $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{S}})$ 的恒等映射 (显然是可测的) 是一个 Borel 同构, 利用定理 22 即得. □

注 a) 若不假设 $\mathcal{S}$ 可分, 则定理不再成立. 例如, 取 $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}$ 为由集合 $\{x\}, x \in \mathbb{R}$ 生成的 $\mathcal{F}$ 中的子 σ-代数. 两个 σ-代数 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{F}$ 有相同的原子, 但是它们不相等.

b) 设 f 和 g 为 Blackwell 空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的两个实值随机变量. 假设在 f 和 g 之间存在函数关系 $g = h \circ f$, 其中 h 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射, 那么存在函数关系 $g = h' \circ f$, 其中 h' 为 Borel 映射. 这是因为 σ-代数 $\mathcal{T}(f)$ 可分并且 g 在 $\mathcal{T}(f)$ 中的每一个原子上为常数, 因此 g 为 $\mathcal{T}(f)$-可测的. 应用定理 18 即得.

§2 容度

理解本节并不需要读者阅读上一节的所有内容, 我们仅用到解析集的定义和紧铺砌的基本性质 (定理 6).

27 **定义** 设 F 为一集合, 其上的铺砌 $\mathcal{F}$ 对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭. 一个 F 上的 (Choquet) 容度 (如果要避免歧义的话, 那么称为 $\mathcal{F}$-容度) 是一个定义在 F 的所有子集上的广义实值函数 I, 且满足下述条件:

a) I 递增 ($A \subset B \Rightarrow I(A) \leqslant I(B)$).

b) 对 F 中的每一递增子集列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 有

$$I(\bigcup_n A_n) = \sup_n I(A_n). \tag{27.1}$$

c) 对 $\mathcal{F}$ 中的每一递减元素列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 有

$$I(\bigcap_n A_n) = \inf_n I(A_n). \tag{27.2}$$

设 A 为 F 的子集, 若

$$I(A) = \sup_{B\in\mathcal{F}_\delta, B\subset A} I(B), \tag{27.3}$$

则称 A 为可容子集.

在经典的位势论中, "Newton 外容度" 为 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$ 中所有紧子集组成的铺砌 $\mathcal{F}$ 上的 Choquet 容度. 从而我们有 $\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F}$, 等式 (27.3) 意味着 A 的外容度可以由 "内部" 估计. 更多细节可以参考 Brelot [1] 或 [2].

定理 (Choquet) 设 I 为一个 $\mathcal{F}$-容度, 则每一个 $\mathcal{F}$-解析集关于 I 是可容的. (28)

我们采用 Bourbaki [①]的证明, 其中涉及两个引理.

引理 1 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 中的每一元素关于 I 是可容的.

证 设 A 为 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 中的一个满足 $I(A) > -\infty$[②] 的元素; A 可以表示为 $\mathcal{F}_\sigma$ 中元素列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 的交, 其中每一个 A_n 为 $\mathcal{F}$ 中递增元素列 $(A_{nm})_{m\geqslant 1}$ 的并. 我们证明, 对每一个实数 $a < I(A)$, 存在 $\mathcal{F}_\delta$ 中的元素 B 使得 $B \subset A, I(B) \geqslant a$. 为此, 首先证明存在 $\mathcal{F}$ 中的元素列 $(B_n)_{n\geqslant 1}$, 满足 $B_n \subset A_n$ 并且 $I(C_n) > a$, 其中 $C_n = A \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$.

先来构造 B_1: 由 (27.1), 我们有

$$I(A) = I(A \cap A_1) = \sup_m I(A \cap A_{1m}).$$

我们选取充分大的一个 m, 使得 $I(A \cap A_{1m}) > a$, 然后令 B_1 等于 A_{1m} 即可.

假设我们已经构造出 $n-1$ 项. 由假设, 我们有 $C_{n-1} \subset A, I(C_{n-1}) > a$. 从而

$$I(C_{n-1}) = I(C_{n-1} \bigcap A_n) = \sup_m I(C_{n-1} \bigcap A_{nm}).$$

我们选取充分大的一个 m, 使得 $I(C_{n-1} \cap A_{nm}) = I(C_n) > a$, 然后令 B_n 等于 A_{nm} 即可.

构造出 $(B_n)_{n\geqslant 1}$ 之后, 我们记 $B'_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$, 并定义

$$B = \bigcap_n B_n = \bigcap_n B'_n.$$

集合 B'_n 属于 $\mathcal{F}$, 递减, 我们有 $C_n \subset B'_n$, 从而有 $I(B'_n) > a$. 由 (27.2), $I(B) \geqslant a$. 由于 $B_n \subset A_n$, 从而有 $B \subset A$. 因此, 集合 B 满足所需条件, 引理成立. □

现在我们设 A 为一个 $\mathcal{F}$-解析集, 那么存在一个紧度量空间 E 及其上的紧铺砌 $\mathcal{K}(E) = \mathcal{E}$ 和 $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 中的元素 B, 使得 B 在 F 上的投影等于 A. 记 π 为 $E \times F$ 在 F 上的投影, $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ 中有限多个元素的并集组成的铺砌. 由定理 4, 不失一般性, 我们可以假设 $\mathcal{E}$ 对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭, 则 $\mathcal{H}$ 对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭.

引理 2 对于任意的 $H \subset E \times F$, 定义集合函数 J:

$$J(H) = I(\pi(H)),$$

则 J 为 $E \times F$ 上的 $\mathcal{H}$-容度.

---

① [3], § 6, 性质 14.

② 当 $I(A) = -\infty$ 时, 由于 $I(\varnothing) = -\infty$ 且 $\varnothing \in \mathcal{F}$, 结论显然成立.

证 函数 J 显然是递增的, 且满足 (27.1). 由定理 6, 对于 $\mathcal{H}$ 中的任意递减元素列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 我们有如下关系:

$$\bigcap_n \pi(B_n) = \pi(\bigcap_n B_n).$$

由此, 性质 (27.2) 成立. □

现在我们可以来完成定理的证明. 由引理 1, 集合 B 关于 J 可容, 从而存在 $\mathcal{H}_\delta$ 中的元素 D 使得 $D \subset B$, $J(D) \geqslant J(B) - \varepsilon(\varepsilon > 0)$. 设 C 为集合 $\pi(D)$: 上面的等式表明 C 为 $\mathcal{F}_\delta$ 中的元素并且有 $C \subset A$, $I(C) \geqslant I(A) - \varepsilon$. □

29 Sion [1] 对上述证明的分析是有趣的. 设 $\mathcal{C}$ 为满足 $I(A) > a$ 的集合 A 的全体, $\mathcal{C}$ 满足下述性质:

(29.1) $$A \in \mathcal{C}, A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{C}.$$

(29.2) 如果 (A_n) 为 F 中的一个递增的子集序列, 并且其并集属于 $\mathcal{C}$, 那么存在某个 A_n 属于 $\mathcal{C}$.

另一方面, 我们有如下性质:

(29.3) 如果一个 $\mathcal{F}$-解析集属于 $\mathcal{C}$, 那么它包含 $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ 中一列递减元素的交集.

证明仅依赖于 (29.1) 和 (29.2). 引理 1 说明 $\mathcal{C}$ 中任一 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 集满足 (29.3). 引理 2 说明 $E \times F$ 中所有在 F 上的投影属于 $\mathcal{C}$ 的集合组成的集类 $\mathcal{C}'$ 仍然满足 (29.1) 和 (29.2). 由此, 在 $E \times F$ 中应用引理 1, 利用铺砌 $\mathcal{E}$ 的紧性我们得到投影运算和交运算可以交换 (定理 6).

Sion 称满足 (29.1) 和 (29.2) 的集类 $\mathcal{C}$ 为可容集类. (29.3) 成立即为 "Sion 可容性定理", 该定理比 Choquet 可容性定理略微一般化, 读者可以参考 Sion [1].

容度的构造

Choquet 定理的假设条件非常一般, 但是很难验证: 我们很少会遇到对 F 的全体子集都有直接定义的集合函数. 更自然的做法是考虑定义在铺砌上的函数, 然后考察是否能将它作为 Choquet 容度延拓到整个幂集合 $\mathcal{P}(F)$ 上. 依照 Choquet 的方法, 我们给出一类 "强次可加" 集合函数的扩张过程. 我们仅考虑非负的情形, 但是这一限制完全不是必须的.

30 **定义** *设 $\mathcal{F}$ 为集合 F 上对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭的铺砌. 设 I 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的一个非负递增集合函数. 如果对于 $\mathcal{F}$ 中的每一对元素 (A, B), 有*

(30.1) $$I(A \cup B) + I(A \cap B) \leqslant I(A) + I(B),$$

那么称 I 是强次可加的.

如果我们将 "$\leqslant$" 换为 "$=$", 那么上述定义即为 $\mathcal{F}$ 上可加函数的定义.

定理 设 $\mathcal{F}$ 为 F 上对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭的铺砌, I 为 $\mathcal{F}$ 上的非负递增集合函数. 下列性质是等价的: 31

a) I 为强次可加函数.

b) 对所有的 $P, Q, R \in \mathcal{F}$, 有 $I(P \cup Q \cup R) + I(R) \leqslant I(P \cup R) + I(Q \cup R)$.

c) 对 $\mathcal{F}$ 中满足 $X \subset Y$, $X' \subset Y'$ 的元素 X, X', Y, Y', 有

$$I(Y \cup Y') + I(X) + I(X') \leqslant I(X \cup X') + I(Y) + I(Y').$$

证 为证明 a) $\Rightarrow$ b), 在 (30.1) 中, 令 $A = P \cup R$, $B = Q \cup R$, 则

$$I(P \cup Q \cup R) + I((P \cap Q) \cup R) \leqslant I(P \cup R) + I(Q \cup R).$$

由于 I 递增, 上述不等式可以推出 b).

为证明 b) $\Rightarrow$ c), 在 b) 中, 令 $P = Y, Q = Y', R = X$, 于是有

$$I(Y \cup Y' \cup X) + I(X) \leqslant I(Y \cup X) + I(Y' \cup X).$$

两边同时加上 $I(X')$, 并且利用等式

$$Y \cup Y' \cup X = Y \cup Y',\ Y \cup X = Y,\ Y' \cup X = Y' \cup X \cup X',$$

我们得到

$$I(Y \cup Y') + I(X) + I(X') \leqslant I(Y) + [I(Y' \cup X \cup X') + I(X')].$$

令 $P = Y', Q = X, R = X'$, 再次应用 b), 我们得到上述不等式右边的方括号内的值的一个上界. 从而推出

$$\begin{aligned} I(Y \cup Y') + I(X) + I(X') &\leqslant I(Y) + I(Y' \cup X') + I(X \cup X') \\ &= I(Y) + I(Y') + I(X \cup X'). \end{aligned}$$

即得 c).

最后, 为证明 c) $\Rightarrow$ a), 只需在 c) 中令 $X = A \cap B, Y = B, X' = Y' = A$, 我们有

$$I(A \cup B) + I(A \cap B) + I(A) \leqslant I(A) + I(B) + I(A).$$

当 $I(A) = +\infty$ 时, 不等式 (30.1) 显然成立. 当 $I(A) < +\infty$ 时, 由上述不等式即得 (30.1). 上述三条性质的等价性得证. □

注 利用归纳法可以将 c) 推广至如下情形: 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为 $\mathcal{F}$ 中的元素并且满足当 $i = 1, 2, \cdots, n$ 时, $X_i \subset Y_i$, 我们有

$$I\Big(\bigcup_i Y_i\Big) + \sum_i I(X_i) \leqslant I\Big(\bigcup_i X_i\Big) + \sum_i I(Y_i). \tag{31.1}$$

当所有的 $I(X_i)$ 均有限时, 上述不等式可以写成更漂亮的形式:

$$I(\bigcup_i Y_i) - I(\bigcup_i X_i) \leqslant \sum_i [I(Y_i) - I(X_i)]. \tag{31.2}$$

不等式 b) 的用处要小一些. 当式中所有的数值均有限时, 它可以写成

$$I(P \cup Q \cup R) - I(P \cup R) - I(Q \cup R) + I(R) \leqslant 0.$$

上述不等式的左端即为集合函数 I 的 "二次差分".

我们将对每一个递增的强次可加集合函数定义相应的 "外容度", 并且我们会研究在何种条件下这一构造方法会诱导出一个真正的 Choquet 容度.

(32) **定理** *设 F 为一集合, 其上的铺砌 $\mathcal{F}$ 对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭. 设 I 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的非负递增强次可加集合函数, 并且满足下列性质:*

(32.1) *对每一个 $\mathcal{F}$ 中的递增元素列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$, 如果其并集 A 也属于 $\mathcal{F}$, 那么*

$$I(A) = \sup_n I(A_n).$$

对每一个集合 $A \in \mathcal{F}_\sigma$, 定义:

$$I^*(A) = \sup_{B\in\mathcal{F}, B\subset A} I(B). \tag{32.2}$$

对 F 中的每一子集 C, 定义:

$$I^*(C) = \inf_{A\in\mathcal{F}_\sigma, A\supset C} I^*(A)^{①} \quad (\inf \varnothing = +\infty). \tag{32.3}$$

则函数 I^* 是递增的, 且满足下列性质:

a) *对 F 中的任意一个递增子集列 $(X_n)_{n\geqslant 1}$,*

$$I^*(\bigcup_n X_n) = \sup_n I^*(X_n). \tag{32.4}$$

b) *设 $(X_n), (Y_n)$ 为 F 中的两个子集列, 满足对所有的 n, $X_n \subset Y_n$, 则*

$$I^*(\bigcup_n Y_n) + \sum_n I^*(X_n) \leqslant I^*(\bigcup_n X_n) + \sum_n I^*(Y_n). \tag{32.5}$$

c) *函数 I^* 为 $\mathcal{F}$-容度当且仅当对 $\mathcal{F}$ 中的每一个递减元素列 $(A_n)_{n\geqslant 1}$,*

$$I^*(\bigcap_n A_n) = \inf_n I(A_n). \tag{32.6}$$

---

① I^* 称为 I 诱导出的外容度.

证 首先我们注意到由定义 (32.2), I 可以延拓到 $\mathcal{F}_\sigma$ 上. 由定义 (32.3), I^* 可以延拓到整个 $\mathcal{P}(F)$ 上. 换句话说, I^* 的定义是相容的. 显然, I^* 在 $\mathcal{P}(F)$ 上是递增的.

1) 设 $(A_n)_{n\geqslant 1}$ 为 $\mathcal{F}_\sigma$ 中的一个递增元素列, $A = \cup_n A_n$, 则我们有

$$I^*(A) = \sup_n I^*(A_n).$$

显然, 我们只需证明 $I(B) \leqslant \sup I^*(A_n)$ 对所有满足 $B \subset A$ 的 $B \in \mathcal{F}$ 成立. 设 $(A_{nm})_{m\geqslant 1}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的一个并集等于 A_n 的元素列. 如有必要, 用集合

$$A'_{nm} = A_{1m} \cup A_{2m} \cup \cdots \cup A_{nm}$$

代替 A_{nm}, 我们可以假设对每一个 m, A_{nm} 关于 n 递增. 于是我们有

$$\sup I^*(A_n) = \sup_n(\sup_m I(A_{nm})) = \sup_n I(A_{nn}).$$

设 B 为 $\mathcal{F}$ 中包含于 A 中的一个元素, 则 $B = \cup_n (B \cap A_{nn})$. 由 (32.1),

$$I(B) = \sup_n I(B \cap A_{nn}) \leqslant \sup_n I(A_{nn}) = \sup_n I^*(A_n).$$

2) 函数 I^* 在 $\mathcal{P}(F)$ 上是强次可加的.

首先, 设 A 和 B 为 $\mathcal{F}_\sigma$ 中的两个元素, 并且设 (A_n) 和 (B_n) 为 $\mathcal{F}$ 中两个递增元素列, 它们的并分别等于 A 和 B. 于是集合 $A_n \cap B_n$ 和 $A_n \cup B_n$ 均属于 $\mathcal{F}$ 并且

$$A \cap B = \bigcup_n (A_n \cap B_n); \ A \cup B = \bigcup_n (A_n \cup B_n).$$

由 1), 我们有

$$\begin{aligned} I^*(A \cup B) + I^*(A \cap B) &= \lim_n I(A_n \cup B_n) + \lim_n I(A_n \cap B_n) \\ &\leqslant \lim_n [I(A_n) + I(B_n)] = I^*(A) + I^*(B). \end{aligned}$$

现在我们考虑 F 中的任意两个子集 X 和 Y. 设 A 和 B 为 $\mathcal{F}_\sigma$ 中分别包含 X 和 Y 的两个元素. 我们有

$$I^*(X \cup Y) + I^*(X \cap Y) \leqslant I^*(A \cup B) + I^*(A \cap B) \leqslant I^*(A) + I^*(B).$$

对 A 和 B 取下确界, 即得所求的不等式

$$I^*(X \cup Y) + I^*(X \cap Y) \leqslant I^*(X) + I^*(Y).$$

3) 设 $(X_n)_{n\geqslant 1}$ 为 F 中的一个递增子集列, $X = \cup_n X_n$, 则我们有

$$I^*(X) = \sup_n I^*(X_n).$$

显然, 我们只需证明上述等式右端有界的情形. 设实数 $h > 0$, 我们在下面会构造 $\mathcal{F}_\sigma$ 中的一个递增元素列 $(Y_n)_{n\geqslant 1}$, 满足 $Y_n \supset X_n$, 并且

$$I^*(Y_n) \leqslant I^*(X_n) + h.$$

记 Y 为全体 Y_n 的并集, 它属于 $\mathcal{F}_\sigma$ 并且它包含 X. 由 1), 我们有

$$I^*(X) \leqslant I^*(Y) = \sup_n I^*(Y_n) \leqslant \sup_n I^*(X_n) + h.$$

由于 h 可以任意小, 从而可以证明命题成立.

下面我们给出 Y_n 的构造过程. 首先, 对每一个 n, 取集合 $Z_n \in \mathcal{F}_\sigma$ 满足 $X_n \subset Z_n$ 并且 $I^*(X_n) \leqslant I^*(Z_n) \leqslant I^*(X_n) + \dfrac{h}{2^n}$. 记

$$Y_n = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_n.$$

下面来递归证明:

$$I^*(X_n) \leqslant I^*(Y_n) \leqslant I^*(X_n) + h\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

由此即得我们所需的结果.

当 $n = 1$ 时, 上述不等式显然成立. 假设不等式对于 n 成立, 我们有 $Y_{n+1} = Y_n \cup Z_{n+1}$. 由强次可加性推出

$$I^*(Y_{n+1}) \leqslant I^*(Z_{n+1}) + [I^*(Y_n) - I^*(Y_n \cap Z_{n+1})].$$

由于 $Y_n \cap Z_{n+1}$ 为 $\mathcal{F}_\sigma$ 中的元素并且它介于 X_n 和 Y_n 之间, 所以方括号内的值小于等于 $h\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$. 由归纳假设,

$$I^*(X_n) \leqslant I^*(Y_n \cap Z_{n+1}) \leqslant I^*(X_n) + h\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} I^*(X_{n+1}) \leqslant I^*(Y_{n+1}) &\leqslant I^*(Z_{n+1}) + h\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &\leqslant I^*(X_{n+1}) + h\left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1 - \frac{1}{2^n}\right), \end{aligned}$$

其中最后一个不等式利用 Z_{n+1} 的定义. 于是对于 $n+1$, 递归不等式仍成立. 从而 3) 得证.

我们还剩下 (32.5) 要证明, 这只需对如下不等式取极限即可:

$$I^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\Big) + \sum_{i=1}^{n} I^*(X_i) \leqslant I^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\Big) + \sum_{i=1}^{n} I^*(Y_i),$$

其中上述不等式为性质 2) 的推论 (参见 (31.1)) (由性质 3) 可知取极限的合理性).

最后, (32.6) 是 I^* 为 Choquet $\mathcal{F}$-容度的充分必要条件, 这是显然的. □

性质 (32.6) 与其他性质略有不同. 没有理由表明 I^* 应该是一个关于 (延拓前的) 铺砌 $\mathcal{F}$ 的容度. 例如, 对分离空间 E 中的紧子集组成的铺砌 $\mathcal{F}$ 以及其开子集组成的铺砌 $\mathcal{F}$ 应用定理 32, 则 (32.6) 在第一种情形时为一个自然条件, 但对第二种情形则不然.

在测度论中的应用

在进一步研究容度之前, 我们指出定理 28 和定理 32 包含了测度论中许多经典重要的结果.

a) 解析集的可测性 33

设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 为一个完备概率空间, $\mathcal{F}$ 为 Ω 中的子集组成的集类, 包含于 $\mathcal{A}$ 中, 并且对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭. 设 I 为 $\mathbb{P}$ 在 $\mathcal{F}$ 上的限制, 对 $\mathcal{F}_\sigma$ 中的每一元素 A, 我们显然有 $I^*(A) = \mathbb{P}(A)$. 由 (32.3), 对 $\mathcal{F}_\delta$ 中的每一个元素 A, 我们有 $I^*(A) = \mathbb{P}(A)$. 条件 (32.1) 和 (32.6) 显然满足.

设 A 为 Ω 的一个 $\mathcal{F}$-解析子集, 由 Choquet 定理得到

$$\sup_{B \in \mathcal{F}_\delta, B \subset A} \mathbb{P}(B) = \inf_{C \in \mathcal{F}_\sigma, C \supset A} \mathbb{P}(C).$$

从而存在 $\mathcal{F}_{\delta\sigma}$ 中的元素 B' 和 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 中的元素 C' 使得 $B' \subset A \subset C'$ 并且 $\mathbb{P}(B') = \mathbb{P}(C')$. 特别的, 我们可以推出 $A \in \mathcal{A}$. 这一结果在 Choquet 定理之前即被人们所知 (参见 Saks [1], 第 50 页).

b) Carathéodory 扩张定理

我们回到定理 32 中的假设. 设 I 为 $\mathcal{F}$ 上的可加函数 (参见定义 30) 并且满足 (32.6). 设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的两个递减元素列, 在下面的等式两边取极限 (由 (32.6) 知取极限的合理性), 34

$$I(A_n \cup B_n) + I(A_n \cap B_n) = I(A_n) + I(B_n),$$

我们看出 I^* 在 $\mathcal{F}_\delta$ 上可加. 设 A 和 B 为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中的两个元素, 实数 $\varepsilon > 0$, 取 $\mathcal{F}_\delta$ 中分别包含于 A 和 B 中的元素 A' 和 B', 使得

$$I^*(A') \geqslant I^*(A) - \varepsilon; \quad I^*(B') \geqslant I^*(B) - \varepsilon,$$

于是我们有

$$\begin{aligned} I^*(A \cup B) + I^*(A \cap B) &\geqslant I^*(A' \cup B') + I^*(A' \cap B') = I^*(A') + I^*(B') \\ &\geqslant I^*(A) + I^*(B) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 I^* 是强次可加的, 并且 ε 可以任意小, 我们得到 I^* 在 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上是可加的.

建立这一结果之后，我们考虑 Boole 代数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}$ 上的非负有限可加函数 I，其中 I 满足 Carathéodory 条件：

(34.1) 若一列递减的 $A_n \in \mathcal{F}$ 满足 $\bigcap_n A_n = \varnothing$，则 $\lim_n I(A_n) = 0$.

显然 I 满足 (32.1). 我们将证明 I 也满足 (32.6). 这一条件可以叙述如下：若 (G_n) 为 $\mathcal{F}$ 中的一个递增元素列，(F_n) 为 $\mathcal{F}$ 中的一个递减元素列并且 $\cup_n G_n \supset \cap_n F_n$，则 $\sup_n I(G_n) \geqslant \inf_n I(F_n)$. 记 $H_n = F_0 \backslash F_n \in \mathcal{F}$，$H_n$ 是递增的，并且我们有 $\cup_n (G_n \cup H_n) \supset F_0$. 由 (32.1) 可知 $\sup_n I(G_n \cup H_n) \geqslant I(F_0)$，进而有 $\sup_n (I(G_n) + I(H_n)) \geqslant I(F_0)$，移项即得 $\sup_n I(G_n) \geqslant \inf_n (I(F_0) - I(H_n)) = \inf_n I(F_n)$.

利用定理 32 和第 34 段开头的注，我们可以看出 I^* 在 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上是可加的，从而 I^* 在 $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上可加. 因为 I^* 可以对于递增的集合序列取极限，所以 I^* 为 I 延拓到 $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ 上的测度. 我们证明了概率论中经典的 Carathéodory 扩张定理.

我们同样将给出另一个重要的扩张定理的证明.

c) Daniell 定理

35 设 Ω 为一集合，$\mathcal{H}$ 为 Ω 上的实值函数组成的线性空间，对于运算 $\wedge$ 封闭且包含常数函数. 设 λ 为 $\mathcal{H}$ 上递增 (即在 $\mathcal{H}$ 中非负元素组成的锥 $\mathcal{H}^+$ 上非负) 的线性泛函，且满足 Daniell 条件：

(35.1) 对 $\mathcal{H}^+$ 中每一个满足 $\lim_n h_n = 0$ 的递减元素列 (h_n)，有 $\lim_n \lambda(h_n) = 0$.

我们来证明 Daniell 定理：存在 σ-代数 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ 上的非负测度 μ (由第 I 章第 22 段向量格形式的单调类定理即得唯一性)，使得对所有的 $h \in \mathcal{H}$，有 $\lambda(h) = \int h\mu$.

设 F 为集合 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. 对 Ω 上的每一个非负函数 g，考虑集合 $W_g = \{(t, \omega) \in F : t < g(\omega)\}$，即 F 中所有严格在 g 的图像下方的点组成的集合. 映射 $g \mapsto W_g$ 是单射. 记 $\mathcal{F}$ 为 F 上所有 $W_h (h \in \mathcal{H}^+)$ 组成的铺砌. 由

$$W_f \cup W_g = W_{f \vee g}, \quad W_f \cap W_g = W_{f \wedge g},$$

我们知道 $\mathcal{F}$ 对于运算 $(\cup f, \cap f)$ 封闭.

设 I 为定义在 $\mathcal{F}$ 上的集合函数：

$$I(W_h) = \lambda(h) \quad (h \in \mathcal{H}^+).$$

由等式 $h_1 \wedge h_2 + h_1 \vee h_2 = h_1 + h_2$，可以推出 I 在 $\mathcal{F}$ 上是可加的. 由 Daniell 条件可以推得 (32.1) 成立，从而利用定理 32 作延拓，我们可以定义 $\mathcal{P}(F)$ 上的集合函数 I^*. 对 Ω 上的每一非负函数 g，记

$$\lambda^*(g) = I^*(W_g).$$

我们来证明 I^* 满足 (32.6). 为此, 我们只需验证如下结论: 设 (f_n) 为 $\mathcal{H}^+$ 中的一个递减元素列, (g_n) 为 $\mathcal{H}^+$ 中的一个递增元素列, 满足 $\sup_n g_n \geqslant \inf_n f_n$, 则 $\lambda^*(\sup_n g_n) \geqslant \inf_n \lambda(f_n)$. 记 $h_n = f_0 - f_n$, 这些函数关于 n 递增并且它们属于 $\mathcal{H}^+$. 由 $\sup_n(g_n + h_n) \geqslant f_0$, 可以推出 $\lambda^*(\sup_n(g_n + h_n)) \geqslant \lambda(f_0)$, 并且由 (32.4), 有 $\sup_n \lambda(g_n + h_n) \geqslant \lambda(f_0)$. 而 $\sup_n \lambda(g_n + h_n) = \sup_n(\lambda(g_n) + \lambda(h_n)) = \sup_n \lambda(g_n) + \sup_n \lambda(h_n)$, 所以 $\sup_n \lambda(g_n) \geqslant \lambda(f_0) - \sup_n \lambda(h_n) = \inf_n \lambda(f_n)$, 即得所需的结论.

最后, λ^* 满足正齐次性: 若 g 为 Ω 上非负函数, a 为非负实数, 则 $\lambda^*(ag) = a\lambda^*(g)$. 事实上, 这一性质对 $g \in \mathcal{H}^+$ 成立, 而显然延拓 (32.2) 和 (32.3) 保持正齐次性.

现在我们来证明对任意的 $A \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ 和 $a \geqslant 0$, W_{aI_A} 属于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. 考虑 Ω 中满足对于任意的 $a \geqslant 0$, W_{aI_A} 和 $W_{aI_{A^c}}$ 均属于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 的子集 A, 记所有这样的子集构成的集合为 $\mathcal{B}$. 因为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 对于运算 $(\cup d, \cap d)$ 封闭, 所以它为 σ-代数. 为证明 $\mathcal{T}(H)$ 包含于 $\mathcal{B}$ 中, 我们只需证明 $\mathcal{B}$ 包含所有形如 $\{h > b\}$ 的集合, 其中 $h \in H, b \in \mathbb{R}$. 由于 $\{h > b\} = \{(h-b)^+ > 0\}$, 从而我们只需证明对所有的 $h \in \mathcal{H}^+$, $\{h > 0\}$ 属于 $\mathcal{B}$. 这可以由下式得到:

$$W_{aI_{\{h>0\}}} = \bigcup_n W_{a((nh)\wedge 1)}, W_{aI_{\{h=0\}}} = \bigcap_n W_{a(1-hn)^+}.$$

对所有的 $A \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, 记

$$\mu(A) = I^*(W_{I_A}) = \lambda^*(I_A),$$

我们就定义了 $(\Omega, \mathcal{T}(\mathcal{H}))$ 上的一个非负有限测度: μ 的可加性由 I^* 在 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上的可加性即得 (第 34 段), 由 (32.4) 可知其 σ-可加性. 最后, 我们证明 $\lambda(h) = \int h\mu$, 对所有的 $h \in \mathcal{H}^+$ 成立, 从而对所有的 $h \in \mathcal{H}$ 也成立. 由 (32.4), 我们只需证明当 g 为形如 $g = \sum_1^n a_i I_{A_i}$ 的阶梯函数时, $\lambda^*(g) = \int g\mu$, 其中 A_i 为 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ 中的两两不交的一列元素, 实数 $a_i > 0$. 在这些条件下, 因为 λ^* 在 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上满足正齐次性和可加性, 所以

$$\lambda^*(g) = \sum_1^n \lambda^*(a_i I_{A_i}) = \sum_1^n a_i \lambda^*(I_{A_i}) = \int g\mu.$$

d) F. Riesz 表示定理 36

我们回忆一下如何由 Daniell 定理推出 "Riesz 表示定理". 设 E 为紧度量空间, $\mathcal{H}$ 为空间 $\mathcal{C}(E)$, λ 为 $\mathcal{H}$ 上的递增线性泛函. 由 Dini 引理 (我们在第 X 章会见到更精致的形式[①]), E 上的每一个递减的点点收敛到 0 的连续函数列 (h_n), 必然一致收敛到 0, 从而条件 (35.1) 成立. 由于 $\mathcal{B}(E) = \mathcal{T}(\mathcal{H})$, 我们有如下定理:

定理 *$\mathcal{C}(E)$ 上的每一个递增线性泛函 λ 有如下唯一表示:*

(36.1) $$\lambda(f) = \int f\mu \quad (f \in \mathcal{C}(E)),$$

①第一版, 第 X 章, 第 6 段.

其中 μ 为 E 上的非负有限测度.

e) 测度的正则性

下面的定理给出了容度和第 3 段中的结果之间的转换关系.

37　**定理**　设 E 为可度量化紧空间. 对 E 上的每一个非负有限测度 μ 和每一个 Borel 集 (或更一般的, μ-可测集) $B \subset E$, 我们有

$$\mu(B) = \sup_K \mu(K), \tag{37.1}$$

其中 K 取遍包含于 B 中的 E 的紧子集.

证　设 μ^* 为 μ 诱导出的外测度①, 则 μ^* 为 $\mathcal{K}$ 上的容度. 每一个 $\mathcal{K}$-解析集 B 关于 μ^* 是可容, 从而它满足 (37.1). 另一方面, $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{A}(\mathcal{K})$ (定理 13). 若 B 为 μ-可测集, 则可以找到两个 Borel 集 B' 和 B'' 使得 $B' \subset B \subset B''$ 且 $\mu(B''\backslash B') = 0$. 对 Borel 集 B', (37.1) 成立, 从而对 B, (37.1) 亦成立. □

㊳　**定理**　对每一个与紧度量空间中的普遍可测子空间同胚的空间 E, 同样的结论仍成立. 从而对每一个 Lusin (特别的, 波兰), Souslin, 余 Souslin 可度量化空间, 同样的结论都成立.

证　由定理 37, 本定理的第一部分显然成立. 由定义 16, 对 Lusin 空间结论成立. 由定理 17, 对波兰空间结论成立. 由定义 16 和第 33 段, 对 Souslin 和余 Souslin 空间, 结论成立. □

我们将在定理 69 中看到这一重要的结果对特定的非可度量化空间仍成立. 这在分析中起着重要的作用. 我们注意到下述推论: 尽管 σ-代数 $\mathcal{B}(E)$ 未必为 Blackwell σ-代数 (例如, 当 E 为余 Souslin 空间时), 但是 E 上的每一个测度的支撑都是可度量化紧子集的可数并集, 从而其支撑为一个 Blackwell 子空间. 因此, 类似于定理 26 的结果可以在相差零测集的意义下被推广.

右连续容度

为了应用定理 32, 我们必须验证条件 (32.1) 和 (32.6). 这就是为什么通常的容度既可以由开集铺砌上的左连续函数构造也可以由紧集铺砌上的右连续函数构造. 我们将在一个分离空间 F 上考虑问题, 像往常一样, 记 $\mathcal{G}$ 为 F 中的开子集组成的铺砌, $\mathcal{K}$ 为 F 中的紧子集组成的铺砌②.

39　**定义**　设 I 为定义在 $\mathcal{G}$ 上的递增非负函数. 如果

(39.1)　对于每一个开集 U 和任意实数 $a < I(U)$, 存在紧集 $K \subset U$, 使得对于每一个包含 K 的开集 V, 有 $I(V) > a$,

① 由定义, 对 E 中的任一子集 A, $\mu^*(A) = \inf_{B \in \mathcal{B}(E), B \supset A} \mu(B)$.

② 我们将不用字母 $\mathcal{F}$ 来表示闭子集构成的铺砌.

那么称 I 左连续.

定理 设 I 为 $\mathcal{G}$ 上的强次可加左连续的非负递增函数, 则 I 在铺砌 $\mathcal{F}=\mathcal{G}$ 上满足 (32.1), 并且 I^* 是一个关于 $\mathcal{K}$ 的容度. 40

证 设 (U_n) 是一个并集为 U 的递增开集序列, $a<I(U)$. 我们取满足 (39.1) 的紧集 $K\subset U$. K 包含于某个 U_n 中, 从而 $\sup_n I(U_n)>a$. 最终, $\sup_n I(U_n)\geqslant I(U)$, 从而 (32.1) 成立.

设 (K_n) 是一个交集为 K 的递减紧集序列. 由 $I^*(K)$ 的定义, 对于每一个实数 $b>I^*(K)$, 存在包含 K 的开集 U 使得 $I(U)<b$. 于是存在某个 K_n 包含于 U 中, 从而 $\inf_n I^*(K_n)<b$, 进而 $\inf_n I^*(K_n)\leqslant I^*(K)$. 我们得到等式成立. □

注 定理 32 说明, 在这些假设下, 每一 $\mathcal{K}$-解析集关于 I^* 可容. 利用右连续性我们可以推出更好的结果: 如果 F 为可度量化可分空间, 那么每一个 Souslin 集 $S\subset F$ 可容. 将 F 嵌入到某个可度量化紧空间 C 中, 对 C 中的每个开集 G, 记 $L(G)=I(G\cap F)$, 那么 L 是右连续且强次可加的, L^* 和 I^* 在 F 的子集上相等. 另一方面, S 为 C 中的 $\mathcal{K}$-解析集 (定义 18).

若我们仅假设 F 为分离空间, 则 Bourbaki 意义下的 Souslin 集 (定义 67) 是可容的.

定义 设 J 为定义在 $\mathcal{K}$ 上的非负递增函数. 如果 41

(41.1) 对每一个紧集 K 和任意实数 $a>J(K)$, 存在开集 $V\supset K$, 使得对任意紧集 $L\subset V$, 有 $J(L)<a$,

那么称 J 右连续.

定理 a) 设 J 为 $\mathcal{K}$ 上的右连续强次可加的非负递增函数, 则 J 在铺砌 $\mathcal{F}=\mathcal{K}$ 上满足 (32.1). 42

b) 对任意开集 G, 定义

$$J^+(G)=\sup_{K\in\mathcal{K},K\subset G}J(K), \tag{42.1}$$

对 F 中的任意子集 A, 定义

$$J^+(A)=\inf_{G\in\mathcal{G},G\supset A}J^+(G), \tag{42.2}$$

则 $J^+|_{\mathcal{K}}=J$. $J^+|_{\mathcal{G}}$ 为定义在开集铺砌上的函数且满足定理 40 的假设, 从而 J^+ 是一个关于 $\mathcal{K}$ 的容度.

证 为了和前面的概念与结果更好地区分开来, 我们记 I 为 (42.1) 中定义在开集铺砌上的函数: 在 $\mathcal{G}$ 上 $J^+=I$, 在整个 $\mathcal{P}(F)$ 上, J^+ 为关于铺砌 $\mathcal{G}$ 的 "外容度" I^*. (而关于铺砌 $\mathcal{K}$ 的外容度 J^* 不是通过开集, 而是通过 $\mathcal{K}_\sigma$ 集来定义的.) J 的右

连续性意味着 $I|_K = J$; 另一方面, 对 I 作相同的讨论我们可以证明 I 在开集铺砌上是左连续的. 现在我们来证明 I 在 $\mathcal{G}$ 上是强次可加的, 这说明我们可以对 $I^* = J^+$ 应用定理 40, 从而本定理中余下的部分得证.

引理 设 U 和 V 为两个开集, K 为包含于 $U \cup V$ 中的紧集, 则存在两个紧集 $L \subset U, M \subset V$ 使得 $K = L \cup M$.

$K \backslash U$ 和 $K \backslash V$ 为分离空间中两个不相交的紧集, 从而它们可以被两个不相交的开集 P 和 Q 所包含, 我们只需取 $L = K \backslash P$ 和 $M = K \backslash Q$ 即可.

有了这一引理后, 我们取两个实数 $a < I(U \cap V)$ 和 $b < I(U \cup V)$, 取紧集 $H \subset U \cap V$ 使得 $J(H) > a$, 另取一紧集 $K \subset U \cup V$ 使得 $J(K) > b$. 如有必要, 用 $H \cup K$ 代替 K, 我们可以假设 $H \subset K$. 由引理, 可以记 $K = L \cup M$, 其中 $L \subset U, M \subset V$, 如有必要, 用 $H \cup L, H \cup M$ 代替它们, 我们可以假设 L 和 M 包含 H. 于是有

$$a + b \leqslant J(H) + J(K) \leqslant J(K \cap M) + J(L \cup M) \leqslant J(L) + J(M) \leqslant I(U) + I(V).$$

对 a 和 b 取上确界, 得到 $I(U \cap V) + I(U \cup V) \leqslant I(U) + I(V)$, 即得所需的不等式.□

注① 我们比较一下 (通过 $\mathcal{K}_\sigma$ 定义的) 容度 J^* 和 (通过开集定义的) 容度 J^+. 它们在 $\mathcal{K}$ 上相等, 从而在 $\mathcal{K}_\sigma$ 上也相等. 对任意的集合 A, 有 $J^*(A) = \inf J^+(B)$, 其中 $B \in \mathcal{K}_\sigma$ 并且 B 包含 A, 从而 $J^*(A) \geqslant J^+(A)$. 当 A 为 $\mathcal{K}$-解析集时, 由 Choquet 定理得到 $J^*(A) = J^+(A)$. 注意到当 F 为可度量化可分空间, A 为 F 中的 Souslin 子集并且 A 不被任何 $\mathcal{K}_\sigma$ 集所包含时, A 关于 J^+ 可容但是未必关于 J^* 可容 $(J^*(A) = +\infty)$.

容度 $J^+ = I^*$ 可以 "通过开集从外部" 计算. 对 J^+ 应用可容性定理, 我们知道从内部或从外部计算容度是等价的. 这点在定理 32 中已经涉及, 但是通过 $\mathcal{K}_\sigma$ 集从外部逼近不如通过开集逼近计算方便.

对定理 28 我们可以给出类似的解释. 设 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{F}$ 生成的单调类; 对每一集合 B, 定义

$$I^+(B) = \inf I(M), \quad \text{其中 } M \in \mathcal{M} \text{ 并且 } M \text{ 包含 } B. \tag{42.3}$$

则 I^+ 为一个容度并且在 $\mathcal{M}$ 上与 I 相等, 定理 28 意味着它与 I 在 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上相等. 因此所有这些关于可容性的结果都同时是从内部和从外部做逼近的定理.

容度定理的某些应用

我们已经给出可容性定理在测度论中的某些应用. 我们现在来看其他的一些应用.

首先, 我们给出第 14 段中提到的关于解析集的分离定理的第二种证明方法.

43 回顾一下记号: $\mathcal{F}$ 为 F 上的半紧铺砌, 假设 $\mathcal{F}$ 对于运算 $(\cup f, \cap d)$ 封闭. 设 $\mathcal{C}$ 为

①法文版第 III 卷勘误: "这一段应当重写, 包括 '从外部逼近' 部分, 参阅第 III 卷, 第 XI 章第 3 段.

包含 $\mathcal{F}$ 且对于运算 $(\cup d, \cap d)$ 封闭的最小集类, $\triangle$ 为 $F \times F$ 的对角线. 对 $F \times F$ 中的每一子集 W, 设

$$I(W) = \begin{cases} 1, & \text{当乘积铺砌 } \mathcal{C} \times \mathcal{C} \text{ 中包含 } W \text{ 的每一元素与对角线相交时}, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

我们将会看到, I 是关于乘积铺砌 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 的一个容度. I 显然是递增的. 我们来证明当 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 中的子集 W 为一个递增序列 (W_n) 的并集时, $I(W) = \lim_n I(W_n)$. 我们只需考虑 $I(W_n) = 0$ 对所有的 n 都成立的情形, 这意味着存在 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 中包含 W_n 的元素 $C_n \times D_n$ 使得 $C_n \cap D_n = \varnothing$. 如有必要, 用 $\cap_{m \geqslant n} C_m$ 代替 C_n, 用 $\cap_{m \geqslant n} D_m$ 代替 D_n, 我们可以假设序列 (C_n) 和 (D_n) 递增, 于是 $(\cup_n C_n) \times (\cup_n D_n)$ 属于 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, 它包含 W 并且它与对角线不相交, 从而 $I(W) = 0$. 最后, 考虑 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 中的递减序列 $W_n = K_n \times L_n$, 其交集为 $W = K \times L$; 为证明 $I(W) = \inf_n I(W_n)$, 我们只需考虑 $I(W_n) = 1$ 对所有的 n 都成立的情形, 即 $K_n \times L_n \neq \varnothing$. 因为铺砌 $\mathcal{F}$ 半紧, 我们有 $K \cap L \neq \varnothing$ 并且 $I(W) = 1$.

设 A 和 B 为两个不可分离的 $\mathcal{F}$-解析集, 这意味着 $I(A \times B) = 1$[①]. 由可容性定理, 因为 $A \times B$ 为 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$-解析集 (定理 9), 所以存在 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 中包含于 $A \times B$ 中的元素 $K \times L$ 使得 $I(K \times L) = 1$. 但是 $K \cap L \neq \varnothing$, 从而 $A \cap B \neq \varnothing$[②]. □

我们转而给出一个有着重要概率应用的结果.

设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为可测空间, A 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集. 对所有的 $\omega \in \Omega$, 记 (44)

$$D_A(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}. \tag{44.1}$$

(为方便起见, 记 $\inf \varnothing = +\infty$.) 函数 D_A 称为关于 A 的首达时[③].

定理 设 A 属于 σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ (或更一般的, A 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-解析集).

a) 首达时 D_A 关于 σ-代数 $\widehat{\mathcal{F}}$ 可测, 其中 $\widehat{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 的普遍完备化.

b) 设 $\mathbb{P}$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, 则存在一个取值于 $[0, \infty]$ 上的 $\mathcal{F}$-可测随机变量 T, 使得

$$T(\omega) < \infty \Rightarrow (T(\omega), \omega) \in A. \tag{44.2}$$

$$\mathbb{P}\{T < \infty\} = \mathbb{P}\{D_A < \infty\}. \tag{44.3}$$

---

① 当 $A \times B \neq \varnothing$ 时; A 或 B 为空集的情形我们留给读者证明.

② 英译本注: 在同一方向上的一个更为深刻的定理的证明参见 Dellacherie, Séminaire de Probabilités de Strasbourg, vol. X, 第 580–582 页. (Lecture Notes in Mathematics 511, Springer-Verlag, 1976.)

③ 译校者注: 此处的原文是 début (英文是 debut), 有中文文献曾译为 "初遇", 根据尽量不用普通名词来翻译专业词汇的原则, 改译为首达时.

(即, 除了一个零测集外, "T 为 A 的截口".)[①]

证 设 $r>0$, 集合 $\{D_A<r\}$ 为集合 $\{(t,\omega):t<r,(t,\omega)\in A\}$ 在 Ω 上的投影. 由定理 13, $\{D_A<r\}$ 为 $\mathcal{F}$-解析集. 由第 33 段, 它属于每一个通过对 $\mathcal{F}$ 作完备化而得到的 σ-代数, 从而 a) 成立.

$\mathbb{P}$ 是固定的, 我们来构造定理 32 中的集合函数 $\mathbb{P}^*$ (就是经典的 "外概率"): 这是一个 $\mathcal{F}$-容度, 在 $\mathcal{F}$ 上和 $\mathbb{P}$ 相等, 在对 $\mathcal{F}$ 做完备化后得到的 σ-代数上也等于 $\mathbb{P}$ (第 II 章注 32.b)). 设 π 是从 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 到 Ω 上的投影, I 为集合函数 $A\mapsto\mathbb{P}^*[\pi(A)]$: I 为一个关于 $\mathcal{H}$ 的容度, 其中 $\mathcal{H}$ 为包含 $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 且对于运算 ($\cup f$[②], $\cap d$) 封闭的最小集类 (第 28 段, 引理 2). 由定理 13, 乘积 σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ (或更一般的, $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F})$) 中的每一个元素都是 $\mathcal{H}$-解析集. 由可容性定理 28, 对所有的 $\varepsilon>0$, 存在 $\mathcal{H}_\delta=\mathcal{H}$ 中包含于 A 中的元素 B, 使得 $I(B)>I(A)-\varepsilon$, 亦即 $\mathbb{P}\{D_B<\infty\}>\mathbb{P}\{D_A<\infty\}-\varepsilon$. 因为对所有的 $\omega\in\Omega$, 集合 $B(\omega)=\{t:(t,\omega)\in B\}$ 为紧集, 所以 D_B 在 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中的图像包含于 A 中. 设 S_ε 为一个与 D_B 几乎处处相等的非负 $\mathcal{F}$-可测随机变量[③], 且记

$$T_\varepsilon(\omega)=\begin{cases}S_\varepsilon(\omega), & \text{当 } (S_\varepsilon(\omega),\omega)\in A \text{ 时},\\ +\infty, & \text{其他情形},\end{cases}$$

则 T_ε 满足 (44.2) 并且满足比 (44.3) 稍弱的条件 (我们有 $\mathbb{P}\{T_\varepsilon<\infty\}>\mathbb{P}\{D_A<\infty\}-\varepsilon$). 简单起见, 给定 $C\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$, 如果非负 $\mathcal{F}$-可测函数 S 满足对所有的 $\omega\in\{S<\infty\}$, 有 $(S(\omega),\omega)\in C$, 那么称 S 为 C 的余项为 $\mathbb{P}\{S=\infty,D_C<\infty\}$ 的截口. 如上所述, 对任意的 $\varepsilon>0$, C 有一个余项小于 ε 的截口. 我们可以递归构造 A 的截口如下: $T_0=\infty$. 如果 T_n 有定义, 我们构造 $A_n=A\cap\{(t,\omega):T_n(\omega)=\infty\}$ 的截口 S_n 使得 $\mathbb{P}\{S_n<\infty\}\geqslant\frac{1}{2}\mathbb{P}\{D_{A_n}<\infty\}$. 定义 A 的截口 $T_{n+1}=T_n\wedge S_n$, 它是截口 T_n 的 "延拓". 这样每一步中构造的截口的余项至多为前一步的一半, 从而 $T=\inf_n T_n$ 是一个余项为零的截口. 从而它满足 (44.2) 和 (44.3). □

45 从测度论的角度来说, 一个 Souslin 可测空间 $(S,\mathcal{S})$ 和 $\mathbb{R}$ 中的解析子集并无区别 (注 20). 所以如果用这样一个空间 $(S,\mathcal{S})$ 代替 $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, 我们只需做一点微小改动, 这一定理仍成立: a) 不再有意义, 但是 A 在 Ω 上的投影 $\pi(A)$ 仍然属于 $\widehat{\mathcal{F}}$; 用 $\mathbb{P}[\pi(A)]$ 代替 $\mathbb{P}\{D_A<\infty\}$, 用 $S\cup\{\infty\}$ 代替 $[0,+\infty]$, b) 仍然成立, 其中 "∞" 为加入到 S 中的点. 为了更好地说明问题, 我们给出一个关于测度提升的定理. 我们在后面将会用到这一定理.

[①](英译本注: 用 b) 中记号, A 的截口 T 称为是完全的, 如果对于每一个满足 $D_A(\omega)<\infty$ 的 ω, 都成立 $T(\omega)<\infty$.) 在附录中, 我们将在一个定理中看到, 存在一个由 $\widehat{\mathcal{F}}$-可测映射的图像构成的完全截口.

[②]译校者注: 原文为 $\cup d$, 根据严加安先生的意见修改.

[③]事实上, D_B 本身是 $\mathcal{F}$-可测的.

定理 设 $(S,\mathcal{S})$ 是一个 Souslin 可测空间, $(E,\mathcal{E})$ 是一个可分的分离可测空间, f 是从 S 到 E 的一个可测映射. 对 E 上的任意概率测度 μ, 存在 S 上的概率测度 λ 使得 $\mu = f(\lambda)$.

证 令 $\mathbb{P} = \mu$, 应用定理 44. f 在 $S \times E$ 中的图像 A 属于 $\mathcal{S} \times \mathcal{E}$. 从而存在一个定义在 $\mathcal{E}$ 中满足 $\mu(B) = 1$ 的元素 B 上, 取值于 S 的可测映射 g, 使得当 $f(x) = y \in B$ 时, $g(y) = x$. 我们只需取 λ 为 $g(\mu)$ 的像测度即可. □

注意到由假设, 我们可以推出 E 是一个 Souslin 可测空间.

§3 有限 Radon 测度

将作为概率论基础的抽象测度论与 (比如 Bourbaki 在关于积分理论的书中讨论的) Radon 测度理论相比较, 我们可以看出后者比前者的优越性可以总结为四点, 按照它们的重要性排序如下:

—— 存在一个好的关于测度的逆 (投射) 极限的定理.

—— 全体测度构成的空间上存在着合理的 (淡, 弱) 拓扑.

—— 可以在任意滤子集合上取某些单调极限①.

—— 可以取消某些 σ-有限性的限制.

这里关于 "重要性" 的排序以概率学家的观点得出. 本书中我们不考虑最后一点, 只研究前面三点. 我们将会很快给出条件期望的存在性定理和测度的分解定理. Bourbaki 的观点始终贯穿本节: 参见 Bourbaki [5].

Radon 测度和滤子

定义 设 E 是一个分离拓扑空间. 如果 E 上的测度 μ 满足 46

1) 对 E 中的任意一点都存在一个开邻域 V, 使得 $\mu(V) < +\infty$.

2) 对所有的 $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \sup_{K \in \mathcal{K}(E), K \subset A} \mu(K), \tag{46.1}$$

那么称 μ 为 Radon 测度.

性质 1) 称为测度 μ 的局部有限性, 性质 2) 称为 μ 的内正则性或胎紧性. 如果一个未必非负的测度可以表示为两个非负 Radon 测度之差, 那么称之为 (带符号的) Radon 测度. 我们仅研究非负测度和有限测度.

(有限) Radon 测度的概念在抽象理论中也有对应: 即对应于一个紧铺砌上的内正则测度. 这一概念貌似有一些应用, 但是并不重要. 读者可以参考本书第一版或者 Pfanzagl-Pierlo 的讲义 [1].

①译校者注: 本条英译本与法文原版不同. 英文版的表述是: 可以对于不可数的递增下半连续函数族取极限.

47 **注** a) 由性质 1) 可以推出, 对任意紧集 K, $\mu(K)<\infty$. 反之, 在局部紧空间上, 这一性质可推出 1). 紧空间上的每一个 Radon 测度都有限.

b) 设 $\mathcal{B}^\mu$ 为 $\mathcal{B}(E)$ 关于 μ 作完备化得到的 σ-代数, 则 $\mathcal{B}^\mu$ 的每一个元素均包含一个与之仅相差一个 μ-零集的 Borel 集. 从而对所有的 $A\in\mathcal{B}^\mu$, (46.1) 仍成立.

c) 当 μ 有限时, 对 $A\in\mathcal{B}^\mu$ 的余集应用 (46.1) 中的逼近, 我们得到①

$$\mu(A)=\inf_{G\in\mathcal{G}(E),G\supset A}\mu(G). \tag{47.1}$$

从而测度亦是 "外正则" 的. 更一般的, 当 μ 非有限时, 对于包含于具有有限测度的开集 U 中的任意 A (在 U 中取余集代替在 E 中取余集), 或包含于一列具有有限测度的开集 U_n 的并集中的任意 A (给定 $\varepsilon>0$, 取开集 G_n 包含 $A\cap U_n$, 使得其测度小于等于 $\mu(A\cap U_n)+\varepsilon\cdot 2^{-n}$, 我们有 $\mu(\cup_n G_n)\leqslant\mu(A)+2\varepsilon$), 上述结论仍成立. 当 E 自身为上述开集列的并时, 对所有的 $A\in\mathcal{B}^\mu$, (47.1) 成立; 当 E 具有可数基时就是如此.

在下文中我们仅考虑有限 Radon 测度的情形.

48 **定理** 设 μ 为有限 Radon 测度. 对任意非负 Borel 可测函数 f (或者更一般的, f 关于完备 σ-代数 $\mathcal{B}^\mu$ 可测), 我们有

$$\int f\mu=\sup_h\int h\mu, \text{ 其中 } h \text{ 为具有紧支集的有界上半连续函数并且 } 0\leqslant h\leqslant f. \tag{48.1}$$

$$\int f\mu=\inf_g\int g\mu, \text{ 其中 } g \text{ 为下半连续函数并且 } g\geqslant f. \tag{48.2}$$

证 对于第一式, 如有必要用 $f\wedge n$ 代替 f, 我们可以假设 f 有界. 于是存在仅取有限个值的可测函数 k 满足 $k\leqslant f$ 并且 $\mu(k)\geqslant\mu(f)-\varepsilon$ (Lebesgue 逼近). 记 k 为有限和 $\sum a_nI_{A_n}$, 对每一 n, 我们取紧集 $K_n\subset A_n$ 使得 $\mu(K_n)\geqslant\mu(A_n)-\varepsilon\cdot 2^{-n}/a_n$, 令 $h=\sum a_nI_{K_n}$ 即得.

对于第二式, 我们取阶梯函数 $j\geqslant f$, 使得 $\mu(j)\leqslant\mu(f)+\varepsilon$ (从上面作 Lebesgue 逼近). 记 j 为可数和 $\sum a_nI_{A_n}$, 对每一个 n, 我们取开集 $G_n\supset A_n$ 使得 $\mu(G_n)\leqslant\mu(A_n)+\varepsilon\cdot 2^{-n}/a_n$ 并且令 $g=\sum a_nI_{G_n}$ 即得. □

49 **定理** 设 μ 为分离空间 E 上的有限 Radon 测度.

a) 设 $(f_i)_{i\in I}$ 为一族上包络为 f 的非负下半连续函数递增滤子, 则 $\mu(f)=\sup_i\mu(f_i)$.

b) 设 $(g_i)_{i\in I}$ 为一族下包络为 g 的非负上半连续函数递减滤子, 如果存在某个指标 i 使得 $\mu(g_i)<+\infty$, 那么 $\mu(g)=\inf_i\mu(g_i)$.

① 回顾一下 $\mathcal{G}(E)$ 为 E 中的开子集组成的铺砌.

c) 如果 E 为完全正则空间[①], 那么对任意非负下半连续函数 f, 我们有 $\mu(f) = \sup_c \mu(c)$, 其中 c 取遍被 f 控制的有界非负连续函数组成的集合 C_f.

证 a) 的集合论形式如下: 当开集 G 为一族递增开集滤子 G_i 的并时, $\mu(G) = \sup_i \mu(G_i)$. 这是因为 μ 正则并且被 G 包含的任意紧集必被某个 G_i 所包含. 取余集, 即得 b) 对于闭集成立.

对任意非负函数 h, 我们考虑在 2^n 处截断的 Lebesgue 逼近:

$$h^{(n)} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} I_{\{h > k2^{-n}\}}.$$

若 h 为下半连续函数, 则 $h^{(n)}$ 为开集的示性函数的线性组合.

利用前一结论, 我们有

$$\begin{aligned} \mu(f) = \sup_n \mu(f^{(n)}) &= \sup_n \mu(\sup_i f_i^{(n)}) = \sup_n \sup_i \mu(f_i^{(n)}) \\ &= \sup_i \sup_n \mu(f_i^{(n)}) = \sup_i \mu(f_i). \end{aligned}$$

我们转而考虑 b): 因为函数族中至少包含一个可积函数, 我们只需考虑所有的 g_i 被某一个可积函数 h 控制的情形. 这时, 用 $g_i I_{\{g_i \leqslant N\}}$ 代替 g_i, 其中 N 取得充分大使得 $\int_{\{h>N\}} h\mu < \varepsilon$, 我们就把问题简化为 g_i 均以 N 为界的情形. 此时, 考虑下半连续函数 $N - g_i$, 我们利用 a) 即证 (推广到非有限 Radon 测度的情形并不显然, 留给读者思考).

最后, 因为 E 为完全正则空间, 所以 C_f 为上包络为 f 的递增滤子组成的集合 (Bourbaki. Top. Gén. 第 IX 章, § 2, 性质 5). 我们利用 a) 即得 c). □

注 特别的, 由 a), 所有开的 μ-零集的并集是一个开的 μ-零集, 它的余集 S_μ 为支撑 μ 的最小的闭集. S_μ 称为 μ 的支撑. 50

由测度的正则性我们得到了性质 a) 和 b). 在后面 (第 63—68 段中的 "题外话" 里) 我们将看到另一个证明: 其中会用到空间 E 的性质而不是测度 μ 的性质. 所有这些都不是很艰深的!

正则性 (胎紧性) 和投射极限

用来构造随机过程的关于投射极限的基本定理是 Kolmogorov 定理 (事实上, Kolmogorov 重新发现了更早由 Daniell 得到的结果). 我们将看到由它可以很容易地导出许多更新的结果.

借助 Carathéodory 扩张定理, Kolmogorov 的证明十分经典 (参见本书第一版, 第 III 章定理 31 或 Neveu [1], 定理 III.3.1, 第 78 页). 对于可度量化可分空间, 我们将给出另一种简洁的证明 (也是经典的).

①英译本注: 关于完全正则空间的定义及性质, 参考 Bourbaki, Top. Gén. 第 IX 章, §1, 第 5—7 段.

51　我们采用如下记号: $E_n(n \in \mathbb{N})$ 为可度量化可分空间, F 为它们的乘积空间, 于是 F 也是可度量化且可分的; F_n 为乘积空间 $E_0 \times E_1 \times \cdots \times E_n$, p_n 为 F_{n+1} 到 F_n 上的正则投影, q_n 为从 F 到 F_n 上的投影.

定理　*对任意 n, 设 μ_n 为 F_n 上的一个胎紧概率测度. 如果 (μ_n) 满足相容性条件: $\mu_n = p_n(\mu_{n+1})$, 那么存在 F 上唯一的概率测度 μ, 使得对所有的 n, $\mu_n = q_n(\mu)$ 并且 μ 是胎紧的.*

证　唯一性. 设 d_n 为 E_n 上定义拓扑的度量并且以 1 为上界, 则 F 上的拓扑可以通过度量 $d((x_n),(y_n)) = \sum 2^{-n} d(x_n, y_n)$ 来定义. 关于 d 的球对于 F 上的乘积 σ-代数 $\prod_n \mathcal{B}(E_n)$, 即 $\mathcal{B}(F)$, 是可测的.

设 $\mathcal{A}$ 为形如 $q_n^{-1}(A_n)(n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{B}(E_n))$ 的子集构成的 Boole 代数, 条件 $q_n(\mu) = \mu_n$ 决定了 $\mathcal{A}$ 上的 μ, 由于 $\mathcal{A}$ 可以生成乘积 σ-代数, 由第 I 章定理 20 即得唯一性.

存在性. 首先我们假设 E_n 为紧空间 (从而 F 为紧空间). 设 $\mathcal{C}_f(F)$ 为 $\mathcal{C}(F)$ 中所有形如 $g_n \circ q_n(n \in \mathbb{N}, g_n \in \mathcal{C}(F_n))$ 的连续函数 g 组成的子空间: 它为包含常数函数的向量空间并且它对于运算 $\wedge$ 封闭. 对于所有的 n, $\mathcal{C}_f(F)$ 生成的 σ-代数包含 $q_n^{-1}(\mathcal{B}(E_n))$, 从而它等于 $\mathcal{B}(F) = \prod_n \mathcal{B}(E_n)$. 由 μ_n 之间的相容性条件, 我们可以定义 $I(g) = \int g_n \mu_n$, 对于 $g \in \mathcal{C}_f$, $I(g)$ 的值与 g 的表示 $g = g_n \circ q_n$ 无关. 显然 I 为 $\mathcal{C}_f$ 上的递增线性泛函并且 $I(1) = 1$. 由 Dini 引理, I 满足 Daniell 条件 (35.1); 因此, 在 F 上存在唯一的测度 μ 满足对所有的 $f \in \mathcal{C}_f$, $I(f) = \int f\mu$, 并且对所有的 $g_n \in \mathcal{C}(F_n)$, $\mu_n(g_n) = I(g_n \circ q_n) = \mu(g_n \circ q_n)$. 从而对所有的 n, $\mu_n = q_n(\mu)$ (第 I 章定理 23).

为推广至一般情形, 将 E_n 嵌入到一个可度量化紧空间 $\overline{E}_n$ 中, 我们引入相应的记号 $\overline{F}_n, \overline{F}, \overline{p}_n, \overline{q}_n$. 每一个 μ_n 可以与其在从 F_n 到 $\overline{F}_n$ 的单射下的像 $\overline{\mu}_n$ 等同起来, 它是 $\overline{F}_n$ 上一个支撑为 F_n 的测度[①]. 由上面讨论的特殊情形, 存在 $\overline{F}$ 上的测度 $\overline{\mu}$ 使得对所有的 n, $\overline{\mu}_n = \overline{q}_n(\overline{\mu})$, 我们将问题简化为只需证明 $\overline{\mu}$ 的支撑为 F. 设 $\varepsilon > 0$, 对任意 n, 我们取紧集 $K_n \subset E_n$ 使得 $\mu_{n+1}(E_0 \times E_1 \times \cdots \times K_n^c) < \varepsilon 2^{-n}$ (当 $n = 0$ 时, $\mu_0(K_0^c) < \varepsilon$), 于是有 $\overline{\mu}(\prod_{k<n} \overline{F}_k \times K_n^c \times \prod_{k>n} \overline{F}_k) < \varepsilon 2^{-n}$. 这样, 如果 K 为包含于 F 中的紧集 $\prod_n K_n$, 那么我们就有 $\overline{\mu}(K^c) \leqslant \sum_n \varepsilon 2^{-n} = 2\varepsilon$, 并且 $\overline{\mu}$ 的支撑为 F. 我们知道测度 $\overline{\mu}$ 在 $\overline{F}$ 上是胎紧的 (定理 37); 因为 $\overline{\mu}$ 在 F 中的某个紧集外的测度小于等于 2ε, 我们可以直接验证它在 F 上也是胎紧的. □

我们将从这一定理得到关于随机过程构造的一般定理, 它同样是由 Kolmogorov 证明的. 然而该定理有时并不像看上去那么实用: 当指标集 T 为不可数集时, σ-代数 $(\mathcal{B}(E))^T$ 并不够用.

52　**推论**　*设 E 为可度量化可分空间, T 为任意指标集, F 为乘积集 E^T, 其上的乘*

[①] 由定义, 这意味着 $\overline{\mu}_n$ 的支撑是 $\overline{F}_n$ 中的一个被 F_n 所包含的 Borel 子集; 因为 μ_n 是胎紧的, 它的支撑为 F_n 中的可数个紧子集的并集.

积 σ-代数 $\mathcal{F} = (\mathcal{B}(E))^T$. 对 T 中的每一个有限子集 U, 记 F_U 为 (可度量化) 空间 E^U, q_U 为 F 在 F_U 上的投影. 设 μ_U 为 F_U 上一个胎紧的概率测度①.

若要 $(F, \mathcal{F})$ 上存在一个概率测度 μ, 满足对 T 中的每一个有限子集 U, $q_U(\mu) = \mu_U$, 必须且只需如下的相容性条件成立:

(52.1) 对每一个满足 $U \subset V$ 的有限子集对 (U, V), μ_U 为 μ_V 在从 F_V 到 F_U 上的投影下的像.

而且, 测度 μ 是唯一的.

证 当 T 为可数集时, 这一定理即是前一定理. 若不然, 对 T 中的每一个可数子集 D, 记 $\mathcal{F}_D$ 为指标属于 D 的坐标映射生成的 σ-代数. 由前一定理我们知道, 对于 D 中的每一个有限子集 U, 存在 $\mathcal{F}_D$ 上唯一的测度 μ_D 使得 $\mu_U = q_U(\mu_D)$. 另一方面, 对存在包含关系 $D \subset D'$ 的两个可数集, 显然我们可以通过 $\mu_{D'}$ 诱导出 $\mathcal{F}_D$ 上的 μ_D. 这样就存在并集 $\cup_D \mathcal{F}_D$ 上唯一的集合函数 μ, 它在每一个 $\mathcal{F}_D$ 上可以诱导出 μ_D. 而这一并集即为 σ-代数 $\mathcal{F}$, 并且 μ 完全可加 (因为 $\mathcal{F}$ 中的每一个元素列包含在某一个 σ-代数 $\mathcal{F}_D$ 中). □

下一定理看上去比 Kolmogorov 定理更一般, 但是我们给出的 (参考了 Bourbaki 的) 证明, 将问题归结为 Kolmogorov 定理. 请特别注意, 这里我们不再假设映射 p_n 是连续的: 这是关于投射极限的经典 Prokhorov 定理的重要推广 (归功于 Parthasarathy).

53

我们采用如下记号: 考虑一列可度量化可分空间 F_n, 其上有正则测度族 μ_n, 以及普遍可测的映射 $p_n : F_{n+1} \to F_n$. 记 F 为 (F_n, p_n) 的投射极限, 即 $\prod_n F_n$ 中满足对所有的 k, $x_k = p_k(x_{k+1})$ 的序列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 的全体构成的子空间, 记 q_n 为从 F 到 F_n 的映射, 它将 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 映为 x_n.

如果对所有的 n, 都有 $\mu_n = p_n(\mu_{n+1})$, 那么称 μ_n 为 (在空间 (F_n, p_n) 的投射系统上的) 概率测度的投射系统. 在这一假设下, 我们有如下定理.

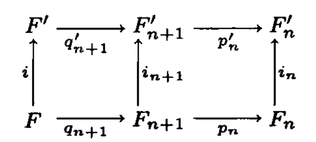
定理 *存在 F 上唯一的概率测度 μ 满足对所有的 n, $\mu_n = q_n(\mu)$. μ 称为概率测度族 μ_n 的投射极限.*

证 我们记 F'_n 为空间 $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n$, p'_n 为 F'_{n+1} 在 F'_n 上的投影, F' 为空间 $\prod_n F_n$, q'_n 为 F' 在 F'_n 上的投影. 对于任意的 n, 我们有从 F_n 到 F'_n 的单射 i_n:

$$x \mapsto (p_1 \circ \cdots \circ p_{n-1}(x), \cdots, p_{n-1}(x), x);$$

F 是 F' 的子集, 记 i 为 F 到 F' 的嵌入映射. 我们有下面的交换图

①这一胎紧性条件可以略微放宽, 参见本书第一版中类似的定理 (第 III 章定理 31), 或 Neveu [1].



空间 F' 为可度量化可分空间, 从而其子空间 F 亦是如此. 嵌入映射 i 连续, 从而它为 Borel 映射. (投影) 映射 q'_n 和 (投影的限制) q_n 同样也是 Borel 映射. 最后, 映射 i_n 是普遍可测的. 我们记 μ'_n 为测度 $i_n(\mu_n)$, A'_n 为 F'_n 中的像 $i_n(F_n)$.

我们来证明 μ'_n 是胎紧的且支撑在 A'_n 上. 由于 i_n 是普遍可测的, 存在一个 Borel 集 H 支撑 μ_n, 在其上 i_n 等于一个 Borel 函数 (用阶梯函数逼近 i_n); 由于 μ_n 是胎紧的, 对所有的 $\varepsilon > 0$, 存在包含于 H 中的紧集 K_ε 使得 $\mu_n(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$. 集合 $K'_\varepsilon = i_n(K_\varepsilon)$ 为 Souslin 集 (定理 18), 从而它是 μ'_n-可测的 (第 34 段), 我们有 $\mu'_n(K'_\varepsilon) > 1-\varepsilon$. 进一步, K'_ε 上由 μ'_n 诱导出的测度是胎紧的 (定理 38). 我们即得 μ'_n 亦是胎紧的, 并且由于 K'_ε 包含于 A'_n 中, 即得 μ'_n 支撑在 A'_n 上.

从交换图中我们可以看出 $p'_n(\mu'_{n+1}) = \mu'_n$, 从而由 Kolmogorov 定理可以推出存在唯一的测度 μ' 使得对所有的 n, $q'_n(\mu') = \mu'_n$. 另一方面, A'_n 支撑 μ'_n, 从而 $q'^{-1}_n(A'_n)$ 支撑 μ'. 这一集合包含所有满足 $x_0 = p_1(x_1)$, $x_{n-1} = p_n(x_n)$ 的序列 $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$. 集合 $\cap_n q'^{-1}_n(A'_n)$ 等于 F 且它支撑 μ'. □

弱收敛和 Prokhorov 定理

完全遵照 Bourbaki 的方法, 本节中我们只给出最基本的结果. 特别的, 我们仅考虑非负测度.

54 **定义** 设 E 为完全正则空间, $\mathcal{M}_b^+(E)$ 为 E 上的 (非负) 有限 Radon 测度组成的锥. $\mathcal{M}_b^+(E)$ 上的弱拓扑就是使得映射 $\mu \mapsto \mu(f)$ 连续的最粗的拓扑, 其中 f 取遍 $\mathcal{C}_b(E)$.

这个拓扑是分离的: 如果两个 Radon 测度 μ_1 和 μ_2 满足对所有的 $f \in \mathcal{C}_b$, $\mu_1(f) = \mu_2(f)$, 那么同样的性质对所有的非负下半连续函数 f (定理 49.c)) 和所有的非负 Borel 函数 f 仍成立 (48.2), 从而 $\mu_1 = \mu_2$.

下面为一些基本性质:

55 **定理** 设 f 为非负下半连续 (相应的, 有界上半连续) 函数, 则对于 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 的弱拓扑来说, 映射 $\mu \mapsto \mu(f)$ 下半连续 (相应的, 上半连续).

证 由定理 49.c), 我们得到下半连续的情形成立; 如果 f 为被 1 控制的上半连续函数, 那么 $1-f$ 为非负下半连续函数. □

56 给定 E 上的函数 f, f 的下半连续正则化函数 $\underline{f}$ 为: $x \mapsto \liminf_{y\to x} f(y)$; 它是被 f 所控制的最大的下半连续函数. 同样的方法, 我们可以定义上半连续正则化函

数 $\overline{f}$. f 的连续点集为集合 $\{\underline{f}=\overline{f}\}$.

推论 设 f 为 E 上的有界 Borel 函数, 如果测度 λ 的支撑在 f 的连续点集上, 那么 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 上的映射 $\mu\mapsto\mu(f)$ 在点 λ 处连续. 57

显然, 它位于两个映射 $\mu\mapsto\mu(\underline{f})$ 和 $\mu\mapsto\mu(\overline{f})$ 之间, 从而它们在 λ 处相等并且它们分别为 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 上的下半连续和上半连续函数.

定理 设 F 为 E 的子空间, i 为从 F 到 E 的嵌入映射. 映射 $\mu\mapsto i(\mu)$ 为从 $\mathcal{M}_b^+(F)$ 到 E 上支撑在 F 上的非负有限测度集合的同胚映射, 后者的拓扑由 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 诱导. 58

证 如果 μ 为 F 上的有限 Radon 测度, $i(\mu)$ 为 E 上的测度, 因为 μ 是胎紧的, 所以 $i(\mu)$ 支撑在 F 中可数个紧子集的并集上, 从而也支撑在 F 上. 反之, 如果 λ 为 E 上支撑在 F 上的有限 Radon 测度, 那么 λ 也支撑在 F 中可数个紧子集的并集上, 从而 F 上由 λ 诱导出的测度是胎紧的. 这样我们就定义了 $\mathcal{M}_b^+(F)$ 和 $\mathcal{M}_b^+(E,F)$ 之间的两个互逆双射, 其中 $\mathcal{M}_b^+(E,F)$ 为 E 上支撑在 F 上的 Radon 测度集合. 为方便叙述, 我们认为这两个集合相同. 我们必须证明 E 和 F 上的弱拓扑在 $\mathcal{M}_b^+(E,F)$ 上相等. 我们对序列加以讨论, 但是所有这些结果均可以推广到任意滤子上.

首先, 如果 $\mu_n\in\mathcal{M}_b^+(E,F)$ 在 F 上弱收敛到 $\mu\in\mathcal{M}_b^+(E,F)$ 并且 f 属于 $\mathcal{C}_b(E)$, 那么 $f|_F$ 属于 $\mathcal{C}_b(F)$, 从而 $\mu_n(f)=\mu_n(f|_F)\to\mu(f|_F)=\mu(f)$, 因此它在 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 中收敛.

反之, 假设 μ_n 在 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 中收敛到 μ. 令 g 为 F 上取值于 0 和 1 之间的连续函数. 用在 F 外分别取值 0 和 1 的方式将 g 延拓成 E 上的函数. 记为 j 和 k, 设 $\overline{j}$ 和 $\underline{k}$ 分别为它们的上半连续和下半连续正则化函数, 则在 F 上, 我们有 $\underline{k}=\overline{j}=g$, 从而由定理 55,

$$\mu(\underline{k})\leqslant\liminf_n\mu_n(\underline{k}),\ \mu(\overline{j})\geqslant\limsup_n\mu_n(\overline{j}),$$

由于 μ_n 和 μ 均支撑在 F 上, 上式可以写成

$$\mu(g)\leqslant\liminf_n\mu_n(g),\ \mu(g)\geqslant\limsup_n\mu_n(g),$$

即得所需的结果. □

在给出定理 58 的关于 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 上拓扑的推论之前, 我们给出 Prokhorov 紧性定理. 此时我们需要回顾一下, 紧空间 C 上的全测度小于等于 1 的 (非负) Radon 测度组成的集合在弱收敛下为紧集 (Bourbaki [4], Intégration, 第 III 章, § 1, 第 9 段, 性质 15). 当 C 可度量化时, 这一定理由第 36 段即可推得.

定理 设 E 为完全正则空间. H 是 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 中一个由全测度小于等于 1 的测 59

度组成的等度胎紧子集，即

(59.1)　对任意实数 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset E$，使得对所有的 $\mu\in H$，$\mu(K^c)<\varepsilon$.

则 H 在 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 中的闭包是弱紧的.

证　设 $\mathcal{U}$ 为 H 上的一个超滤子，我们来证明 $\mathcal{U}$ 在 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 中收敛. 对任意自然数 n，记 $\varepsilon_n=1/n$，取紧集 K_n 使得 $\mu(K_n^c)<\varepsilon_n$，我们可以假设序列 (K_n) 递增. 设 μ_n 为测度 $\mu\cdot I_{K_n}$，我们可以视之为 K_n 上的一个测度. 利用定理前面引用的紧性结果，我们有，对所有的 n，μ_n 沿着 $\mathcal{U}$ 弱收敛到一个测度 λ_n，我们将它看成 E 上支撑在 K_n 上的测度. 设 $m\leqslant n$，f 为 E 上的非负连续函数; fI_{K_m} 和 fI_{K_n} 分别在 K_m 和 K_n 上连续，从而我们有

$$\lambda_m(f)=\lambda_m(fI_{K_m})=\lim_{\mathcal{U}}\mu(fI_{K_m})\leqslant\lim_{\mathcal{U}}\mu(fI_{K_n})=\lambda_n(fI_{K_n})=\lambda_n(f).$$

因此 $\lambda_m\leqslant\lambda_n$. 记 $\lambda=\sup_n\lambda_n$，这是 E 上一个全测度小于等于 1 的测度. 显然，它正则 (和 sup 交换). 我们将证明 μ 收敛到 λ. 设实数 $\varepsilon>0$，f 为 E 上取值于 0 和 1 之间的连续函数. 取 n 充分大使得 $\varepsilon_n<\varepsilon$，并且 $\lambda_n(1)\geqslant\lambda(1)-\varepsilon$，于是有

$$\begin{aligned}|\mu(f)-\lambda(f)|&\leqslant|\mu_n(f)-\lambda_n(f)|+\langle\mu-\mu_n,f\rangle+\langle\lambda-\lambda_n,f\rangle\\&\leqslant|\mu_n(f)-\lambda_n(f)|+\mu(K_n^c)+\langle\lambda-\lambda_n,1\rangle\\&\leqslant|\mu_n(f)-\lambda_n(f)|+2\varepsilon.\end{aligned}$$

注意到沿着 $\mathcal{U}$，$\mu_n(f)\to\lambda_n(f)$，我们即得结论. □

当 E 为局部紧空间或波兰空间时，定理中的条件为弱紧的必要条件 (Prokhorov [1]). 另一方面，度量空间上每一个弱收敛的胎紧测度列都是等度胎紧的 (Le Cam [1]). 然而性质 (59.1) 不是紧性的必要条件，甚至在由有理数组成的如此 "简单" 的度量空间上也不是必要条件 (Preiss [1]).

概率测度的拓扑空间

60　设 E 为可度量化可分空间. 我们在随后的几段中研究 E 上的 Radon 概率测度[①]组成的空间 $\mathcal{P}(E)$，其上的拓扑为弱收敛拓扑. 同样的讨论对全测度小于等于 1 的 Radon 测度组成的空间或整个锥 $\mathcal{M}_b^+(E)$ 仍适用.

定理　*若 E 为可度量化可分空间，则 $\mathcal{P}(E)$ 亦为可度量化可分空间. 进一步，若 E 为紧空间，相应的，波兰，Lusin，Souslin，余 Souslin 空间，则 $\mathcal{P}(E)$ 具有同样的性质.*

证　我们的出发点为如下众所周知的性质: 若 E 为可度量化紧空间，则 $\mathcal{P}(E)$ 亦为可度量化紧空间.

[①] 在我们将遇到的空间上，所有概率测度都是 Radon 测度 (定理 38).

当 E 为可度量化可分空间时，我们将其嵌入到某个可度量化紧空间 C 中，于是 $\mathcal{P}(E)$ 与 $\mathcal{P}(C)$ 中所有支撑在 E 上的概率测度组成的子空间可以视为同一 (定理 58)，从而它为一个可度量化可分空间.

若 f 为 C 上的有界连续函数，则由弱收敛的定义，函数 $\mu \mapsto \mu(f)$ 在 $\mathcal{P}(C)$ 上连续. 当 f 为有界下半连续函数时，$\mu(f)$ 为下半连续函数 (定理 55). 当 f 为有界 Borel 函数时，由单调类定理知 $\mu(f)$ 为 Borel 函数. 如果 E 为波兰空间，那么 E 为 C 中一列开集 (G_n) 的交 (定理 17). 在 G_n 上测度为零的概率测度组成的集合在 $\mathcal{P}(C)$ 中是闭集，从而 $\mathcal{P}(E)$ 为紧度量空间 $\mathcal{P}(C)$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集，因此它为波兰空间[①] (Bourbaki [5], Top. Gén. 第 IX 章, §6, 第 2 段). 当 E 为 Lusin 空间时，E 为 C 中的 Borel 集 (定理 19)，因此 $\mathcal{P}(E) = \{\mu \in \mathcal{C} : \mu(E^c) = 0\}$ 为可度量化紧空间 $\mathcal{P}(C)$ 中的 Borel 集，从而它为 Lusin 空间.

假设 E 为 Souslin 空间，则 E 为 C 中的解析集，从而存在一个紧度量空间 D 和 $(\mathcal{K}(D) \times \mathcal{K}(C))_{\sigma\delta}$ 中的元素 A，使得 A 在 $D \times C$ 到 C 上的投影 π 下的像为 E. 由定理 45，$\mathcal{P}(E)$ 为 $\mathcal{P}(A)$ 在 $\mathcal{P}(D \times C)$ 到 $\mathcal{P}(C)$ 上的连续映射 $\lambda \mapsto \pi(\lambda)$ 下的像. 因为 $\mathcal{P}(A)$ 为 Borel 集，所以 $\mathcal{P}(E)$ 为 Souslin 空间.

为研究 E 为余 Souslin 空间的情形，我们需要多做一些工作. 首先我们给出一个有趣的定义.

定义 设 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为铺砌集. 如果 Ω 上的非负函数 f 满足对所有的 $a \in \mathbb{R}^+$，集合 $\{f > a\}$ 属于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$，那么称 f 为 $\mathcal{F}$-解析函数. 61

我们通常省略 $\mathcal{F}$. 这等价于说对任意 $a > 0$，$\{f \geqslant a\}$ 属于 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$，集合 $\{f < a\}$ 和 $\{f \leqslant a\}$ 为解析集的余集. 解析集的示性函数为解析函数 (这可以帮助读者记住不等号的方向!). 利用 Lebesgue 逼近我们容易得到：f 为解析函数当且仅当 f 为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中元素的示性函数的非负系数线性组合的递增序列的极限[②].

我们证明一个引理，这里仍然使用前一定理证明中的记号.

定理 设 f 为可度量化紧空间 C 上的非负函数. 如果 f 为解析 (相应的, Borel, 普遍可测) 函数，那么函数 $\mu \mapsto \mu(f)$ 为 $\mathcal{P}(C)$ 上的解析 (相应的, Borel, 普遍可测) 函数. 62

证 Borel 函数的情形我们在前面已经证明. 另一方面，我们只需考虑 f 为集合 E 的示性函数的情形.

设 E 为解析集，我们考虑前一定理证明中的集合 A. 当 $a \geqslant 1$ 时，集合 $\{\mu \in \mathcal{P}(C) : \mu(E) > a\}$ 为空集，当 $a < 1$ 时，上述集合为 $(a, 1] \times \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(C)$ 在映射

---

①我们可以证明，通过 E 上的距离可以显式构造出 $\mathcal{P}(E)$ 上的距离 (参见 Prokhorov [1], Strassen [1]).

②我们可以证明，f 为 $\mathcal{F}$-解析函数当且仅当集合 $W_f = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : t < f(\omega)\}$ 是一个 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-解析集.

$(t,\lambda,\lambda') \mapsto t\cdot\pi(\lambda)+(1-t)\lambda'$ 下的像, 从而由第 18 段我们得到它为解析集.

最后, 我们设 E 普遍可测, Λ 为 $\mathcal{P}(C)$ 上的有限测度. 在 C 上, 对所有的 $B\in\mathcal{B}(C)$, 我们规定 $\lambda(B)=\int\mu(B)\Lambda(\mathrm{d}\mu)$, 这样就定义了 λ. 设 B_1 和 B_2 为 C 中的两个 Borel 子集, 满足 $B_1\subset E\subset B_2$ 且 $\lambda(B_1)=\lambda(B_2)$, 于是对所有的 $\mu\in\mathcal{P}(C)$, 我们有 $\mu(B_1)\leqslant\mu(E)\leqslant\mu(B_2)$, 并且 $\int\mu(B_1)\Lambda(\mathrm{d}\mu)=\int\mu(B_2)\Lambda(\mathrm{d}\mu)$. 由此, 我们得到 $\mu\mapsto\mu(E)$ 是普遍可测的. □

现在我们来完成定理 60 的证明: 设 E 为余 Souslin 空间. 集合 $\mathcal{P}(E)^C$ 为 $\mathcal{P}(C)$ 中使得 $\mu(E^c)>0$ 的 μ 组成的集合; 因为 E^c 为解析集, 所以函数 $\mu\to\mu(E^c)$ 为解析函数并且 $\mathcal{P}(E)$ 为一个解析集的余集. □

题外话: 可数性质、非可度量化 Lusin 空间

Cartier [1] 曾指出, 在 Bourbaki 的 Top. Gén., 第 IX 章, 处理 Souslin 或 Lusin 空间的那一段中, "可度量化" 都可以换成 "分离". 这一修正 (将在 "定稿" 中出现①) 十分有趣: 分析中的许多重要空间, 特别的, 拓扑向量空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 及其对偶空间 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{R}^n$ 上的分布组成的空间) 均为非可度量化 Lusin 空间.

目前看来, 随机分布理论以后会变得非常重要, 所以在这一部分, 我们要来说明 Bourbaki 的 Lusin 空间和 Souslin 空间的理论可以非常方便地归结为我们上面讨论过的情形. 为此, 我们将会用到一些 (从 Bourbaki 的书里 "借" 来的) 关于 Lindelöf 空间的一些引理, 它们本身也是有趣的.

63 **定义** *对于分离空间 E, 若 E 的每一个开覆盖都有一个可数子覆盖, 则称 E 是 (L) 的. 若 E 中的每一个开集都是 (L) 的, 则称 E 是 (LL) 的. 若 $E\times E$ 是 (LL) 的, 则称 E 是 (LLL) 的.*

(L) 是 "Lindolöf" 的意思. 这一方便但有些可笑的记号仅在本节中使用.

每一个具有可数基的空间 (特别的, 可度量化可分空间) 都是 (LLL) 的. 从而任意分离空间 E 满足下列性质: 存在一个 (LLL) 空间 F 以及从 F 到 E 的连续映射 f. 我们在后面所遇到的所有非可度量化空间都是这样的.

64 **定理** *(LL) 空间 E 上的每一族下半连续 (上半连续) 函数 $(f_i)_{i\in I}$ 都有具有相同上 (下) 包络的可数子族.*

证 我们仅考虑下半连续函数的情形. 设 $f=\sup_{i\in I}f_i$. 对任意实数 a, 开集类 $\{f_i>a\}(i\in I)$ 的并集为开集 $\{f>a\}$; 设 J_a 为 I 中的可数子集, 满足 $\cup_{i\in J_a}\{f_i>a\}=\cup_{i\in I}\{f_i>a\}$. 我们记 $g=\sup_{i\in J}f_i$, 其中 J 为所有有理数 a 对应的 J_a 的并集. 于是对任意有理数 a, $\{f>a\}=\{g>a\}$, 从而 $f=g$. 定理成立. □

①译校者注: 事实上, 这个 "定稿" 至今也没有出版, 也许永远不会有这样一个版本.

一个等价的叙述: 对任意的 $f_i, i \in I$, 存在可数集合 J, 使得 $\sup_{i\in I} f_i$ 和 $\sup_{i\in J} f_i$ 有相同的下半连续正则化函数. 如果 E 具有可数基, 那么结论对 inf 同样成立 (无需将下半连续换为上半连续!). 这即为 "Choquet 引理". 读者可以参考 Brelot [1], 第 6 页.

推论 *设 μ 为 E 上的非负测度, $(f_i)_{i\in I}$ 为 E 上的一个非负下半连续函数递增滤子族. 设 $f = \sup_i f_i$, 则 $\mu(f) = \sup_i \mu(f_i)$.* 65

证明是显然的. 对于上半连续函数亦有类似的结论.

定理 *设 E 为 (LLL) 空间, 则 E 上存在一个具有可数基且比原来的拓扑更粗的分离拓扑. 若 E 是完全正则的, 则该拓扑可以假设是可度量化的.* 66

证 对 E 中的每一个点对 (x, y), 分别考虑包含 x 和 y 的不相交开集对 (U_x, U'_y). 于是 $E \times E$ 中对角线 $\triangle$ 的余集为开集 $U_x \times U'_y$ 的并. 由 (LLL) 性质, 存在一列点对 (x_n, y_n) 使得 $\triangle^c$ 为 $U_{x_n} \times U'_{y_n}$ 的并集. 设 T 为由集合 U_x, U'_y 生成的拓扑, 则 T 是分离的, 并且粗于原始拓扑. 我们可以验证它具有可数基.

如果 E 为完全正则空间, 那么存在一族取值于区间 $[0,1]$ 的连续函数 $(f_i)_{i\in I}$ 分离 E 中的点. 于是闭集 $F_i = \{(x,y) : f_i(x) = f_i(y)\}$ 的交集为对角线 $\triangle$. 由 (LLL) 性质, 存在 I 中的元素列 (i_n) 使得 $\triangle$ 为 F_{i_n} 的交. 于是函数 $d(x,y) = \sum_n 2^{-n}|f_{i_n}(x) - f_{i_n}(y)|$ 为 E 上的距离并且由它定义的拓扑 T' 粗于 E 上的原始拓扑. 因为 E 具有 (L) 性质, 所以 T' 也是 (L) 的. 因此, 对所有的 $\varepsilon > 0$, 存在半径为 ε 的可数个开球覆盖 E. 我们即得 E 在 T' 下可分. □

推论 *所有紧的 (LLL) 空间都可度量化.*

现在我们来看 Bourbaki 引入的一类未必可度量化的拓扑空间.

定义 *设 E 为分离拓扑空间. 若存在一个 Souslin (相应的, Lusin) 可度量化空间 P 和 P 到 E 上的一个连续映射 (相应的, 连续单射), 则称 E 为 Souslin (相应的, Lusin) 空间.* 67

我们也可以假设 P 为波兰空间 (见附录), 此时即为 Bourbaki 的定义.

每一个 Lusin 空间都是 Souslin 空间. 每一个 Souslin 空间都是可分的 (LLL) 空间. Souslin 空间中的每一个紧集都是 (LLL) 的, 从而它可度量化.

Bourbaki 关于 Souslin 和 Lusin 空间的基本结果是, 从测度论的观点来看, 它们即为常规的 Souslin 和 Lusin 空间. 但是我们也将对直接映像定理和同构定理稍加改进: 与第 18 和 21 段作比较我们可以发现, 关于 f 的假设被加强了 (用连续性代替可测性), 而关于 F 的假设有所改变 (不再要求 σ-代数是可分的).

定理 *设 P 和 F 为两个分离拓扑空间, f 为从 P 到 F 的一个连续映射, E 为像 $f(P)$.* 68

a) *若 P 为 Souslin 空间, 则 E 为 $\mathcal{B}(F)$-解析集, 并且可测空间 $(E, \mathcal{B}(E))$ 是*

Souslin 空间.

b) *若 P 为 Lusin 空间并且 f 为单射, 则 $E \in \mathcal{B}(F)$, 并且可测空间 $(E, \mathcal{B}(E))$ 是 Lusin 空间.*

特别的, 在定义 67 中对 $F = E$ 应用这一定理, 如前所述, 我们看到 Lusin (Souslin) 拓扑空间作为可测空间是 Lusin (Souslin) 空间. 因此, 我们可以将前面所有的 "可测" 理论应用到这些空间中.

证 由定义 67, 不失一般性我们可以假设 P 可度量化, 因而具有可数基. 首先我们给出一个引理.

引理 *存在 $\mathcal{B}(F)$ 的可分子 σ-代数 $\mathcal{C}$, 使得 E 中的每一点均为 $\mathcal{C}$ 中的原子.*

设 (U_n) 为 P 上拓扑的可数基, 由集合 $\overline{f(U_n)}$ 生成的 σ-代数即为所求的子 σ-代数. 设 $x \in E$, 对每一个 $y \in F, y \neq x$, 存在 x 的开邻域 H 满足 $y \notin \overline{H}$. P 中的开集 $f^{-1}(H)$ 至少包含一个 U_n, 于是 $\overline{f(U_n)}$ 包含 x, 不包含 y. □

设 $\mathcal{C}$ 为一个这样的 σ-代数, i 为从 F 到 $(F, \mathcal{C})$ 的伴随分离空间 $(\dot{F}, \dot{\mathcal{C}})$ 的典则映射. 于是 $\mathcal{C} = i^{-1}(\dot{\mathcal{C}})$ 并且 $E = i^{-1}(i(E))$. 当 f 为单射, P 为 Lusin 空间时, 对 $i \circ f$ 应用定理 18 和 21, 我们得到 $i(E) \in \mathcal{A}(\dot{\mathcal{C}})$, $i(E) \in \dot{\mathcal{C}}$. 从而我们有 $E \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{B}(F))$, $E \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(F)$. 更一般的, 当 f 为单射并且 P 为 Lusin 空间时, $\mathcal{B}(P)$ 中任一元素 A 的像 $i \circ f(A)$ 属于 $\dot{\mathcal{C}}$, 从而 $f(A)$ 属于 $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(F)$ 并且 f 为从 $(P, \mathcal{B}(P))$ 到 $(E, \mathcal{B}(F)|_E) = (E, \mathcal{B}(E))$ 的同构. 因此后一可测空间为 Lusin 空间.

我们只剩下证明当 P 为 Souslin 空间或 f 不为单射时, $(E, \mathcal{B}(E))$ 为 Souslin 空间. 但是我们已知 $(E, \mathcal{C}|_E)$ 为 Souslin 空间 (定理 18), 从而只需证明每一个 $A \in \mathcal{B}(E)$ 属于 $\mathcal{C}|_E$. 为此, 取 F 中的 Borel 子集 A' 使得 $A = A' \cap E$, 记 $\mathcal{C}'$ 为 $\mathcal{C}$ 和 A' 生成的 σ-代数; 对 $\mathcal{C}'$ 应用前面的讨论, 我们得到 $(E, \mathcal{C}'|_E)$ 为 Souslin 空间. 因为两个 σ-代数 $\mathcal{C}|_E$ 和 $\mathcal{C}'|_E$ 都是 Souslin 的, 可比较, 并且具有同样的原子, 由 Blackwell 定理推出它们相等, 证毕. □

注 我们可以通过类似的方式得到 Bourbaki 形式的分离定理: 分离拓扑空间中的两个不相交的 Souslin 子空间可以被 $\mathcal{B}(F)$ 中的不相交元素所分离.

69　**定理** *设 E 为 Bourbaki 意义下的 Souslin 空间 (从而也是 Lusin 空间 ……), 则 $\mathcal{B}(E)$ 上的每一个有限测度 μ 都是胎紧的.*

证 设 μ 为 E 上的一个有限测度, P 和 f 如定义 67 中所述. 因为可测空间 $(E, \mathcal{B}(E))$ 是 Souslin 空间, 所以它同构于一个可度量化可分空间. 由第 45 段, 存在 P 上的测度 λ 使得 $\mu = f(\lambda)$. 因为测度 μ 是一个胎紧测度 (定理 38) 在连续映射下的像, 所以它自身也是胎紧的. 由于 E 中的紧子集是可度量化的 (定义 67[①]), 所以

[①]译校者注: 原文为定理 68, 根据严加安先生的意见修改.

这一结论更显得非常有意思. □

测度的分解

测度分解定理的名声不佳, 概率论学者使用它的时候总是说明 "我们不得不" 取条件分布 ······, 但实际上它是一个非常简单且易于证明的结果. 这里我们给出精确的表述以便日后作为参考, 并且给出简洁的证明. 70

问题是这样提出的: 我们有两个概率空间, 以及从第一个概率空间到第二个概率空间的可测映射

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \underset{q}{\mapsto} (E, \mathcal{E}, \mu). \tag{70.1}$$

我们假设 $q(\mathbb{P}) = \mu$. 所谓 $\mathbb{P}$ 的分解, 就是寻找一个 $\mathcal{E}$-可测族 (第 II 章定义 13) $x \mapsto \mathbb{P}_x$, 其中 $\mathbb{P}_x$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度, 使得 $\mathbb{P} = \int \mathbb{P}_x \mu(\mathrm{d}x)$, 并且对 μ 下几乎所有的 x, $\mathbb{P}_x$ 的支撑在 $q^{-1}\{x\}$ 上[①].

这一问题和条件概率的联系如下: 设 f 为非负 $\mathcal{E}$-可测函数, g 为非负 $\mathcal{F}$-可测函数. 我们有

$$\mathbb{E}[g \cdot f \circ q] = \int \mathbb{E}_{\mathbb{P}_x}[g \cdot f \circ q] \mu(\mathrm{d}x) = \int f(x) \mathbb{E}_{\mathbb{P}_x}[g] \mu(\mathrm{d}x),$$

这是因为 (对 μ 下几乎所有的 x) $f \circ q$ 在 $\mathbb{P}_x$ 下几乎处处等于常数 $f(x)$. 这意味着 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_x}[g]$ 可以看成 "已知 $q = x$" 时 g 的条件期望 (第 II 章注 38) 并且 $\omega \mapsto \int g \mathbb{P}_{q(\omega)}$ 为条件期望 $\mathbb{E}[g|\mathcal{T}(q)]$ 的一个等价型.

我们将证明: 当 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个 "好的" 概率空间时, 条件概率的问题可以令人满意地解决, 而且只需对 E 稍作假设, 我们便能完成分解.

第一种情形: Ω 是一个紧度量空间, 其上有 Borel σ-代数[②] $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{F}$. 71

对每一函数 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, 我们考虑 $(E, \mathcal{E})$ 上 (有限, 未必非负) 的测度 $q(f \cdot \mathbb{P})$. 这一测度关于 μ 绝对连续, 因此存在 (Radon-Nikodym 定理) 一个 $\mathcal{E}$-可测的分布密度 d_f, 我们在 d_f 的等价类中任取一个元素.

设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的可数向量空间, 且对于运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 封闭, 包含函数 1, 并在 $\mathcal{C}(\Omega)$ 中稠密. 设 A 是 E 中满足 $f \mapsto d_f(x)$ 为空间 $\mathcal{H}$ 上的递增 $\mathbb{Q}$ 线性泛函并且满足 $d_1(x) = 1$ 的 x 的全体. 我们可以直接验证 A 属于 $\mathcal{E}$ 并且 $\mu(A) = 1$. 当 $x \in A$ 时, 线性泛函 $d_f(x)$ 可以延拓为 $\mathcal{C}(\Omega)$ 上范数为 1 的递增线性泛函 (即 Ω 上的一个概率测度) (定理 36). 我们记这一概率测度为 $\mathbb{P}_x$, 相应的期望记为 $\mathbb{E}_x$. 另一方面, 当 $x \notin A$ 时, 我们可以取 Ω 上的任意概率测度 θ 并且记 $\mathbb{P}_x = \theta$.

若 $f \in \mathcal{H}$, 则函数 $x \mapsto \mathbb{E}_x[f]$ 是 $\mathcal{E}$-可测的. 从而, 当 $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ 时, 由一致收敛性; 当 f 为有界 $\mathcal{F}$-可测时, 由单调类定理, 即得 $x \mapsto \mathbb{E}_x[f]$ 为 $\mathcal{E}$-可测.

①只有当 $\mathcal{E}$ 中的原子为 E 中的点时, 这一条件是自然的.

②这些结论可以推广到 σ-代数 $\mathcal{F} = \mathcal{B}_u(\Omega)$ 的情形.

我们来验证, 当 f 为 $\mathcal{F}$-可测且在 Ω 上有界或非负时, 映射 $\omega \mapsto \mathbb{E}_{q(\omega)}[f]$ 是条件期望 $\mathbb{E}[f|\mathcal{T}(q)]$ 的一个等价型. 我们只需验证 $f \in \mathcal{H}$ 的情形. 此时, 这一函数形如 $h \circ q$, 其中 $h = \mathbb{E}.[f]$ 是 $\mathcal{E}$-可测的, 从而它是 $\mathcal{T}(q)$-可测的. 反之 (第 I 章第 18 段), 每一个有界 $\mathcal{T}(q)$-可测随机变量可以写成 $g \circ q$, 其中 g 是有界 $\mathcal{E}$-可测的. 条件期望的基本性质就化为下面的等式 (需要验证)

(71.1) $$\int f(\omega)g(q(\omega))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int \mathbb{E}_{q(\omega)}[f]g(q(\omega))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

左端为 g 关于测度 $q(f.\mathbb{P})$ 的积分, 从而由 d_f 的定义, 其值为 $\int g(x)d_f(x)\mu(\mathrm{d}x)$. 右端由像测度 μ 的定义可写为 $\int \mathbb{E}_x[f]g(x)\mu(\mathrm{d}x)$. 由 $d_f(x) = \mathbb{E}_x[f]$ 在 μ 下几乎处处成立, 我们即得等式成立.

72 第二种情形: Ω 为可度量化可分空间并且 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$[①]; 测度 $\mathbb{P}$ 是胎紧的.

此时, $\mathbb{P}$ 支撑在集合 J 上, 其中 J 为 Ω 中紧子集的可数并. 将 Ω 嵌入到一个紧度量空间 K 中, 我们将 $\mathbb{P}$ 与 K 上支撑在 (Borel) 子集 J 上的测度视为同一, 和上面一样, 构造 K 上的 $\mathbb{P}_x$. 我们有 $\mathbb{P}(J^c) = 0$, 从而 $\mathcal{E}$-可测集 $\{x : \mathbb{P}_x(J^c) = 0\}$ 支撑 μ. 对这个集合以外的 $\mathbb{P}_x$, 令其值为 J 上的任一概率测度 θ, 于是所有的概率测度 $\mathbb{P}_x$ 支撑在 J 上, 进而支撑在 Ω 上, 从而我们可以忽略紧化的过程.

当 Ω 同胚于一个紧度量空间中的普遍可测子空间时, 这一结果可以应用到每一个概率测度 $\mathbb{P}$ 上 (定理 38). 同样的, 当 Ω 为一个 Bourbaki 意义下的 Lusin 或 Souslin 空间时, 通过取截口, 我们可以将 $\mathbb{P}$ "提升" 到 Ω 上的可度量化 Souslin 空间 P 上 (定义 67), 在 $\mathbb{P}$ 中分解, 再 "回到" Ω 上. 这一定理可以满足分析的通常需要.

到目前为止, 空间 $(E, \mathcal{E})$ 仍为抽象空间: 我们可以取 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{F}$ 的一个子 σ-代数, q 为恒等映射. 这一特殊的情形值得专门加以叙述:

定理 设 Ω 是一个可度量化可分空间, 其上有 Borel σ-代数 $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$. 设 $\mathbb{P}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的一个胎紧概率测度, 则存在 Ω 上关于 $\mathcal{F}$ 的任意子 σ-代数 $\mathcal{E}$ 的条件概率测度.

不仅如此, 同样的结论对于完备 σ-代数 $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ 的子 σ-代数 $\mathcal{E}$ 仍成立, 但是我们不详细讨论. 显然, 这里的条件概率测度不是支撑在 $q^{-1}\{y\}$ 上的!

73 现在回到第 70 段中提出的问题, 我们想要检验是否对 μ 下几乎所有的 x, 概率测度 $\mathbb{P}_x$ 支撑在 $q^{-1}\{x\}$ 上. 我们已经提到过, 这需要对 $(E, \mathcal{E})$ 做一些假定. 所以除了第 72 段中的那些假设以外, 我们还要求:

(73.1) $$E \text{ 为可度量化可分空间并且 } \mathcal{E} = \mathcal{B}(E).$$

设 G 为乘积空间 $\Omega \times E$, 其上有 Borel σ-代数 $\mathcal{G} = \mathcal{B}(G) = \mathcal{F} \times \mathcal{E}$. 设 p 为从 Ω 到 G 的映射 $\omega \mapsto (\omega, q(\omega))$. 我们容易验证

$$\mathbb{P} \text{ 在 } p \text{ 下的像测度是积分 } \int_E \mathbb{P}_x \otimes \varepsilon_x \mu(\mathrm{d}x).$$

① 这些结论可以推广到 σ-代数 $\mathcal{F} = \mathcal{B}_u(\Omega)$ 的情形.

(在矩形集上比较这两个概率测度.) 设 J 为支撑 $\mathbb{P}$ 的 Ω 中紧子集的可数并集; J 显然是 Lusin 的, 从而 $p(J)$ 是 Souslin 的 (第 18 段), 所以它在 G 中普遍可测, 并且它支撑像测度. 我们由此得到, 对 μ 下几乎所有的 x, $\mathbb{P}_x$ 支撑在 $p(J)$ 在 x 处的截口 J_x 上, 而后者包含于 $q^{-1}\{x\}$ 中.

双测度[①]

我们给出关于胎紧测度的最后一个应用, 它并不重要 …… 但是有时会有用. 这里的证明源自 Morande [1].

定理 *设 E 和 F 为两个可度量化可分空间, β 为从 $\mathcal{B}(E)\times\mathcal{B}(F)$ 到区间 $[0,1]$ 的映射, 满足 $\beta(E\times F)=1$. 假设 β 具有如下性质:* 74

对所有的 $A\in\mathcal{B}(E)$, $\beta(A,\cdot)$ 为 F 上的胎紧测度并且对所有的 $B\in\mathcal{B}(F)$, $\beta(\cdot,B)$ 为 E 上的胎紧测度.

则存在 $E\times F$ 上唯一的概率测度 $\mathbb{P}$, 使得 $\beta(A,B)=\mathbb{P}(A\times B)(A\in\mathcal{B}(E),B\in\mathcal{B}(F))$ 并且 $\mathbb{P}$ 是胎紧的.

证 设 $\mathcal{A}$ 为由所有 "矩形" (即形如 $A\times B$ 的集合) 的有限并集组成的 Boole 代数, 其中 $A\in\mathcal{B}(E),B\in\mathcal{B}(F)$. $\mathcal{A}$ 中的每一个元素 U 为互不相交的矩形集合 $A_i\times B_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的有限并集. 我们可以验证 $\sum_{i=1}^n\beta(A_i,B_i)$ 的值仅依赖于 U, 与其分解无关, 记其为 $\mathbb{P}(U)$. $\mathcal{A}$ 上的函数 $U\to\mathbb{P}(U)$ 显然可加.

沿用上述的记号, 给定 $\varepsilon>0$, 因为测度 $\beta(A_i,\cdot)$ 是胎紧的, 所以存在紧集 $T_i\subset B_i$ 使得 $\beta(A_i,T_i)\geqslant\beta(A_i,B_i)-\varepsilon/2n$. 又因为测度 $\beta(\cdot,T_i)$ 是胎紧的, 所以存在紧集 $S_i\subset A_i$ 使得 $\beta(S_i,T_i)\geqslant\beta(A_i,T_i)-\varepsilon/2n$. 记 K 为 $\mathcal{A}$ 中的紧集 $\cup_iS_i\times T_i$, 我们有 $K\subset U$ 并且 $\mathbb{P}(K)\geqslant\mathbb{P}(U)-\varepsilon$.

我们考虑 $\mathcal{A}$ 中交集为空集的一个递减元素列 (U_n). 我们用反证法来证明 $\mathbb{P}(U_n)\to 0$. 假设 $\mathbb{P}(U_n)\geqslant 3a>0$, 对所有的 n, 设 K_n 为 $\mathcal{A}$ 中包含于 U_n 内的紧集, 满足 $\mathbb{P}(U_n\setminus K_n)\leqslant a2^{-n}$; 如果我们记 $L_n=K_0\cap\cdots\cap K_n$, 那么 $\mathbb{P}(U_n\backslash L_n)\leqslant 2a$, 从而 $\mathbb{P}(L_n)\geqslant a$ 并且 L_n 非空. 因此递减紧集列 (L_n) 的交集非空. 最终, $\cap_nU_n\neq\varnothing$, 这与假设矛盾. □

利用 Carathéodory 扩张定理 (第 34 段), 我们可以将 $\mathbb{P}$ 扩张为 $\mathcal{T}(\mathcal{A})=\mathcal{B}(E\times F)$ 上的概率测度. $\mathbb{P}$ 的胎紧性在 $\mathcal{A}$ 上成立: 对递增序列没有任何困难, 用类似于上面的方法可以证明同样的结论对递减序列也成立. 再利用单调类定理即得 $\mathbb{P}$ 的胎紧性.

---

① 严加安先生注: 进一步结果见 J. Horowitz, Sém. Prob. XI, 第 59–64 页.

第 IV 章　随机过程

在本章的前两节中, 我们研究随机过程, 以及构造具有良好性质的等价型的方法. 在后两节中的基本概念是带有一族递增 σ-代数的概率空间. 本章中我们在不涉及鞅论的前提下将讨论推向极致.

§1　过程的综述

过程的定义

1　**定义**　设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, $\mathbb{T}$ 为任意集合, $(E, \mathcal{E})$ 为可测空间. 定义在 Ω 上, 时间集合为 $\mathbb{T}$, 状态空间为 E 的随机过程 (或者简称为过程), 是一族以 $\mathbb{T}$ 为指标集, 取值于 E 中的随机变量 $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

空间 Ω 通常称为过程的样本空间. 随机变量 X_t 称为过程在时刻 t 的状态. 对每一个 $\omega \in \Omega$, 从 $\mathbb{T}$ 到 E 的映射 $t \mapsto X_t(\omega)$ 称为 ω 对应的轨道, 或简称为 ω 的轨道.

本书中, $\mathbb{T}$ 为广义实轴 $\overline{\mathbb{R}}$ 的子集: 通常它为 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的一个区间 ("连续情形") 或 $\overline{\mathbb{Z}}$ ("离散情形"), 有时它为稠密可数集. 这就是 "时间"、"时刻" 以及 "轨道" 这些术语最初出现的场合. 但是也存在过程理论的某些分支, 其中 $\mathbb{T}$ 仅为偏序集 (例如在统计力学中, $\mathbb{T}$ 经常取作以包含关系为偏序的某个有限集或可数集的子集全体) 或者 $\mathbb{T}$ 上完全没有序结构 (在遍历论中的某些问题中, $\mathbb{T}$ 可能是一个群; 在涉及 Gauss 过程的轨道正则性问题时, $\mathbb{T}$ 是一个度量空间). 所以在这本时间的概念起到关键作用的书中, 我们只是给出了过程理论的一种片面的介绍.

2　对定义 1 我们需要做一些注记.

a) 正如随机变量的概念仅依赖于可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 的结构, 而不依赖于概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 的结构一样, 过程的概念并不要求给定概率测度 $\mathbb{P}$. 有时我们会提到某个空间上的过程而不给定其上任何概率测度.

b) 我们将一族随机变量 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 定义为过程, 即从 $\mathbb{T}$ 到取值于 E 的随机变量组成的集合中的映射. 一个过程也可以看成从 $\mathbb{T}\times\Omega$ 到 E 上的映射 $(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$, 或从 Ω 到所有可能轨道组成的集合中的映射 $\omega\mapsto(t\mapsto X_t(\omega))$. 在后一种表示中, 过程作为取值于轨道集的随机变量 (即一个 "随机函数") 出现, 但是这一概念从数学角度看并不完善: 在所有轨道构成的集上没有 (合适的)[①] σ-代数. 我们将在后面讨论.

第二种观点 (过程为 $\mathbb{T}\times\Omega$ 上的函数) 其实更加有用. 我们通过一个定义来阐述:

定义 给定 $\mathbb{T}$ 上的 σ-代数 $\mathcal{T}$. 如果 $\mathbb{T}\times\Omega$ 上的映射 $(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$ 关于乘积 σ-代数 $\mathcal{T}\times\mathcal{F}$ 可测, 那么称过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 可测. 3

在离散情形 ($\mathbb{T}\subset\mathbb{Z}$) 下, 若 σ-代数 $\mathcal{T}$ 就是 $\mathbb{T}$ 的所有子集的集合, 则这个概念是平凡的: 每一个过程均可测.

我们继续给出关于定义 1 的注记.

c) 为明确起见, 取 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$[②]. 此时, 一个随机过程就是一个用来描述某个发展带有偶然性的自然现象的数学模型. 我们自然想知道: 在什么条件下两个过程描述了同一个现象? 另一方面, 对某个自然现象, 我们如何通过观测来构造描述该现象的过程? 4

这些问题的经典回答如下: 假设在任意有限个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$, 我们能够以任意的精度确定过程在这些时刻的状态. 通过大量的独立实验, 我们能够以任意的精度估计下面事件的概率:

$$\mathbb{P}\{X_{t_1}\in A_1,\cdots,X_{t_n}\in A_n\}\quad(A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{E}),\tag{4.1}$$

一般说来, 通过观测我们得不到除此之外的更多信息. 从而两个过程 (X_t) 和 (X'_t) 表示同一自然现象这一事实可以合理地定义如下:

定义 我们考虑具有相同时间集合 $\mathbb{T}$ 和状态空间 $(E,\mathcal{E})$ 的两个随机过程:

$$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(X_t)_{t\in\mathbb{T}})\quad 和\quad(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}',(X'_t)_{t\in\mathbb{T}}).$$

如果对任意有限个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和 $\mathcal{E}$ 中任意的元素 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 有

$$\mathbb{P}\{X_{t_1}\in A_1,X_{t_2}\in A_2,\cdots,X_{t_n}\in A_n\}=\mathbb{P}'\{X'_{t_1}\in A_1,X'_{t_2}\in A_2,\cdots,X'_{t_n}\in A_n\},$$

① 译校者注: "(合适的)" 三字为中译本所加.

② 译校者注: 英译本没有这一句.

那么我们称过程 (X_t) 和 (X'_t) 等价.

等价这一术语还有其他称谓: 有时我们称 (X_t) 和 (X'_t) 具有同样的时间分布, 或简称为同分布, 或称它们互为等价型.

5 d) 然而, 对时间分布的概念有很多批评. 一方面, 它太精确. 实际中我们不可能在一个确定的时刻做测量. 所有的仪器仅能给出小时间区间上的平均结果. 换句话说, 我们无法直接研究随机变量 X_t 本身, 而只能考虑形如

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(X_s)\mathrm{d}s$$

的随机变量, 其中 f 为状态空间 E 上的函数 (考虑这样的积分当然需要过程的某种可测性). 这会引出 "几乎等价" 的概念. 我们将在第 35—45 段中研究它.

e) 另一方面, 时间分布的概念不够精确, 因为它仅涉及集合 $\mathbb{T}$ 中的有限子集, 而一般来说, $\mathbb{T}$ 是不可数的. 举例如下: 给定概率空间 $\Omega = [0,1]$, Borel σ-代数 $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ 和 Lebesgue 测度 $\mathbb{P}$, 我们考虑如下定义的两个实值过程 (X_t) 和 (Y_t): $\mathbb{T} = [0,1] = \Omega$.

$$\text{(5.1)}\qquad \begin{array}{l}\text{对所有的 } \omega \text{ 和所有的 } t, X_t(\omega) = 0.\\ \text{对所有的 } \omega \text{ 和所有的 } t \neq \omega, Y_t(\omega) = 0;\quad Y_t(t) = 1.\end{array}$$

对每一个 t, 几乎必然有 $Y_t = X_t$, 但是满足 $X_.(\omega) = Y_.(\omega)$ 的 ω 组成的集合为空集. 这两个过程具有相同的时间分布, 但是前一过程所有的轨道均连续, 而后一过程所有的轨道都不连续. 我们不应该因为这一例子是人为构造的而抛弃它; 对于概率论专家, 我们给出另一个例子: 考虑零初值的一维布朗运动 (B_t), 我们定义:

$$\text{(5.2)}\qquad \begin{array}{l}\text{对所有的 } \omega \text{ 和所有的 } t, X_t(\omega) = 0.\\ \text{对所有的 } \omega \text{ 和所有满足 } B_t(\omega) \neq 0 \text{ 的 } t, Y_t(\omega) = 0;\\ \text{对所有的 } \omega \text{ 和所有满足 } B_t(\omega) = 0 \text{ 的 } t, Y_t(\omega) = 1.\end{array}$$

这时的情形和前面一样, 但是 (Y_t) 绝不是一个 "人造" 的过程: Paul Lévy 对它做了一系列研究, 其结果被认为是概率论中的杰作 (Lévy [1], 第 VI 章).

现在我们给出刚刚遇到的两个情形的正式定义. 第一个定义比等价的概念略为精确:

6 **定义** 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 和$(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 为定义在同一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 取值于同一个状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 的两个随机过程, 如果对每一个 $t \in \mathbb{T}$, 都有

$$X_t = Y_t \qquad \text{p.s.}$$

那么称 $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 为 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 的一个修正[①].

① 在英文里, 遵循 Doob, 我们用 standard modification.

第二个定义从概率论的观点给出过程尽可能精确的刻画: 两个不可区别的过程实际上为 "同一个" 过程.

定义 与定义 6 中的符号相同, 如果对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 7

$$X_t(\omega) = Y_t(\omega) \text{ 对所有的 } t \text{ 均成立},$$

那么称 (X_t) 与 (Y_t) 在 $\mathbb{P}$ 下不可区别[①] (或简称为不可区别).

例如, 两个实值随机过程 (X_t) 和 (Y_t) 在 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 上有右连续 (或左连续) 轨道, 并且对每一个有理数 t, 几乎必然有 $X_t = Y_t$, 那么两个过程不可区别. 事实上, 轨道 $X.(\omega)$ 和 $Y.(\omega)$ 在有理数点上几乎必然相等, 从而在 $\mathbb{R}$ 中的每一点上它们都几乎必然相等.

不可区别过程的定义可以用另一种方式叙述: 如果 $\mathbb{T} \times \Omega$ 中的子集 A 的示性函数 I_A 作为 (t,ω) 的函数是一个随机过程 (即对所有的 t, $\omega \mapsto I_A(t,\omega)$ 是一个随机变量), 那么称 A 为随机集. 如果过程 I_A 和 0 不可区别, 那么称集合 A 为不足道集. 这意味着 A 在 Ω 上的投影被一个 $\mathbb{P}$-零集所包含. 于是两个过程 (X_t) 和 (Y_t) 不可区别, 当且仅当集合 $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ 为不足道集. 8

时间分布: 典则过程及构造

在具有给定时间分布的所有过程中, 我们可以用毫无疑义且自然 (即除了时间分布外我们没有关于过程的其他任何信息) 的方式找到一个随机过程, 称之为典则过程. 9

考虑取值于 $(E,\mathcal{E})$ 的随机过程 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(X_t)_{t\in\mathbb{T}})$. 记 τ 为从 Ω 到 $E^{\mathbb{T}}$ 的映射, 将 $\omega \in \Omega$ 映为 $E^{\mathbb{T}}$ 中的点 $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{T}}$, 即 ω 的轨道. 当给定 $E^{\mathbb{T}}$ 上的乘积 σ-代数 $\mathcal{E}^{\mathbb{T}}$ (参见第 I 章定义 8) 时, τ 为可测映射. 从而我们可以考虑 $(E^{\mathbb{T}},\mathcal{E}^{\mathbb{T}})$ 上的像测度 $\tau(\mathbb{P})$. 记 Y_t 为指标 t 在 $E^{\mathbb{T}}$ 上的坐标映射, 从而 (由像测度的定义) 过程 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(X_t)_{t\in\mathbf{T}})$ 与 $(E^{\mathbb{T}},\mathcal{E}^{\mathbb{T}},\tau(\mathbb{P}),(Y_t)_{t\in\mathbb{T}})$ 等价. 我们有如下定义:

定义 与前面的记号相同, 过程

$$(E^{\mathbb{T}},\mathcal{E}^{\mathbb{T}},\tau(\mathbb{P}),(Y_t)_{t\in\mathbf{T}})$$

称为 (X_t) 对应的 (或与 (X_t) 等价的) 典则过程.

两个过程 (X_t) 和 (X'_t) 等价当且仅当它们诱导出的典则过程相同.

当时间集合 $\mathbb{T}$ 不可数时, 这个典则过程几乎从来不会直接用到: σ-代数 $\mathcal{E}^{\mathbb{T}}$ 仅包含依赖于可数个变量 Y_t 的事件, 而过程的最有趣的那些性质 (例如轨道的连续性)

[①] 译校者注: 在原书法文版中此处是一个新造的单词 indistinguables. 原作者特别注明, 他们有时也会按照法语的拼写规范把字母 u 去掉.

则会涉及所有这些随机变量. 典则过程一般是作为一个步骤被用来构造更为复杂的过程.

我们必须强调, 所谓 "典则性" 依赖于我们掌握了多少关于过程 (X_t) 的信息. 如果我们只知道时间分布, 那么所有人都会同意采用上述典则过程. 但是, 如果我们还知道, 例如过程 (X_t) (在 $\mathbb{T}$ 的某个拓扑下) 有一个连续轨道的等价型, 那就没人会再想用这个典则过程了! 在这种情况下我们会用从 $\mathbb{T}$ 到 E 的所有连续映射的集合 (在其上用前述方法来转移测度) 来代替从 $\mathbb{T}$ 到 E 的所有映射的集合 $E^{\mathbb{T}}$.

10 利用典则过程的概念我们可以给出一个简单但是很不令人满意的方法来解决随机过程的构造问题.

我们回到第 4 段中描述的情形: 我们想要利用随机过程来刻画已经观测到的一个 "随机现象". 由于它仅在等价的意义下有定义, 我们想到利用典则过程. 利用可测空间 $(E^{\mathbb{T}}, \mathcal{E}^{\mathbb{T}})$ 和坐标映射 $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$, 我们只需构造这个可测空间上的一个概率测度 $\mathbb{P}$, 满足: 对 $\mathbb{T}$ 中的每个有限子集 $\mathbf{u} = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ 和 E 中的每一族有限个可测子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,

$$\mathbb{P}\{Y_{t_1} \in A_1, \cdots, Y_{t_n} \in A_n\} = \phi\{t_1, \cdots, t_n; A_1, \cdots, A_n\},$$

其中函数 ϕ 由对现象的观测决定. 为使得这一构造成为可能, 集合函数

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \mapsto \phi(t_1, t_2, \cdots, t_n; A_1, \cdots, A_n)$$

必须能够扩张为 $(E^{\mathbf{u}}, \mathcal{E}^{\mathbf{u}})$ 上的概率测度 $\mathbb{P}_{\mathbf{u}}$. 而且这一概率测度由函数 ϕ 唯一决定 (对 $E^{\mathbf{u}}$ 中形如 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的子集的有限并组成的集合应用第 I 章定理 20). 另一方面, 我们必须验证对 $\mathbb{T}$ 中每一对满足 $\mathbf{u} \subset \mathbf{v}$ 的有限子集 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$, 有

$$\pi_{\mathbf{uv}}(\mathbb{P}_{\mathbf{v}}) = \mathbb{P}_{\mathbf{u}},$$

其中 $\pi_{\mathbf{uv}}$ 为 $E^{\mathbf{v}}$ 到 $E^{\mathbf{u}}$ 上的投影. 这里我们看出概率测度的投射系统的定义 (第 III 章推论 52), 以及有可能构造一个概率测度 $\mathbb{P}$ 使得它与投射系统 $(\mathbb{P}_{\mathbf{u}})$ 的投射极限等价. 由第 III 章推论 52 给出的简单条件我们可以推出概率测度 $\mathbb{P}$ 的存在性.

适应过程和循序过程

为明确起见, 我们从此以后假设时间集合 $\mathbb{T}$ 为非负闭半轴 $\mathbb{R}_+$. 除去在少数几个微妙的地方做出注释外, 我们把对其他时间集合的平凡推广留给读者完成. 随后的几小段中介绍的术语将贯穿全书, 但是我们推迟到第 3 节再详细研究它们.

11 给定可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$. 设 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 为 $\mathcal{F}$ 中的一族子 σ-代数, 满足对 $s \leqslant t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. 我们称 $(\mathcal{F}_t)$ 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的递增 σ-代数族, 或 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的 σ-代数流, $\mathcal{F}_t$ 称为 t 前事件的 σ-代数. 定义

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s,\ \mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s (t > 0). \tag{11.1}$$

如果对所有的 t, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, 那么称 $(\mathcal{F}_t)$ 是右连续的. 例如, 对任意一族 $(\mathcal{F}_t)$, $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in\mathbb{R}}$ 是右连续的. 左连续的概念可以类似定义, 但是看上去意义不大.

当时间集合为 $\mathbb{N}$ 时, 我们对 $\mathcal{F}_{n+}$ 的定义不再感兴趣, 而 $\mathcal{F}_{n-1}$ 起到了 $\mathcal{F}_{n-}$ 的作用, 这与定义 (11.1) 是相容的.

定义 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为定义在可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的过程, $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为一族递增的 $\mathcal{F}$ 中的子 σ-代数. 如果对每个 $t \in \mathbb{R}_+$, X_t 是 $\mathcal{F}_t$-可测的, 那么称 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 是适应的. 12

例 任意过程 (X_t) 关于 σ-代数流 $\mathcal{F}_t = \mathcal{T}(X_s, s \leqslant t)$ 适应. 我们通常称它为过程的自然 σ-代数流.

上述的定义有其直观的解释: 如果我们将参数 t 视为时间, 每一个事件视为某个物理现象, 那么子 σ-代数 $\mathcal{F}_t$ 就是那些表示在时刻 t 前的物理现象的事件全体. $\mathcal{F}_t$-可测随机变量就是那些仅依赖于时刻 t 之前世界的发展变化的随机变量. 显然, 表示"上周日的赛马结果"和"下周日的赛马结果"的两个过程在观测者看来是截然不同的, 因为前一个过程是适应的而后一个不是. 然而第一个过程 (在一阶近似下) 关于时间可能是平稳的, 从而这两个过程有相同的分布. 因此引进一个递增的 σ-代数族表示, 参数 t 是一个时间标度, 未来有不确定性而过去是可知的 (至少对理想化的观测者如此). 这一基本的想法归功于 Doob. 从数学的角度看, 在假设中出现 σ-代数流并不是一种限制, 因为对所有的 t, 取 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ 是允许的. 这是 19 世纪决定论的观点, 理想化的观测者可以在任何时刻通过对一个复杂微分系统做积分来知道宇宙在未来的所有演变. 如果有一个随机性的"实在"干预, 这个干预发生在初始时刻, 因果律决定了这不可能在以后的时刻发生, 而且这样并不影响在宇宙的这种描述中用到概率, 因为我们的测量方法不精确. 这就解释了为什么 σ-代数流 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ 常被称为确定性 σ-代数流. 13

在带有 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上, 我们把可测过程的概念用下述方式精确化:

定义 给定可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和一族递增的 $\mathcal{F}$ 的子 σ-代数 $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的过程. 如果对于任意的 $t \in \mathbb{R}_+$, 从 $[0, t] \times \Omega$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的映射 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ 关于 σ-代数 $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ 可测, 那么我们称 (X_t) 关于族 $(\mathcal{F}_t)$ 是循序可测的或者简称为循序的. 14

一个循序过程显然是适应的.

我们怎样判断给定的过程是否循序? 一个常用的方法是检验如下稍弱一些的条件:

a) 如果 (X_t) 是适应过程, 并且对于每一个 $\varepsilon > 0$, (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})_{t\geqslant 0}$ 都是循序的, 那么它关于 $(\mathcal{F}_t)$ 也是循序的.

b) 如果把适应性去掉, 那么我们仍然可以得到 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是循序的.

两种情形均可以用同样的方法处理: 考虑形如 $\{(t,\omega), X_t(\omega)\in A\}$ 的集合, 其中 $A\in\mathcal{E}$, 我们可以简化为实值过程的情形. 于是对 $s\leqslant t$, 我们有

$$X_s=\lim_{\varepsilon\to 0} X_s I_{[0,t-\varepsilon)}(s)+X_t I_{\{t\}}(s). \tag{14.1}$$

对所有的 $\varepsilon>0$, 右端为一个 $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_t$-可测的函数 (如果 X_t 仅为 $\mathcal{F}_{t+}$-可测, 那么右端为 $\mathcal{B}([0,t])\times\mathcal{F}_{t+}$-可测函数).

特别的, 如果把定义 14 中的区间 $[0,t]$ 换为区间 $[0,t)$, 那么我们仅能得到 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是循序的.

这里有一个最重要的循序过程的例子, 我们将在第 3 节中更深入地研究它.

15 **定理** *设 E 为可度量化空间, (X_t)为取值于 E 中且轨道右连续的 $(\mathcal{F}_t)$ 适应过程, 则 (X_t) 是 $(\mathcal{F}_t)$ 循序的. 同样的结论对于轨道左连续的过程亦成立.*

证 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 我们定义当 $t\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n})$ 时,

$$X_t^n=X_{(k+1)2^{-n}}.$$

对 $\varepsilon>2^{-n}$, 这一过程显然关于 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 是适应的. 因此由右连续性, X_t 等于 $\lim_n X_t^n$, 从而它是 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 循序的. 由于它是适应过程, 利用第 14 段 a) 即可得证. 左连续的情形同理可证. □

§2 轨道的正则性

一条由随机性所控制的轨道, 例如, 粒子受到来自各个方向的撞击后的运动轨迹, 没有理由会十分规则. 我们自然要问什么样的实值过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$, 其轨道会满足下列性质:

—— 轨道是不是可测的? 是不是局部可积的?
(或者说: 过程是否存在具有这些性质的修正?);

—— 轨道是否局部有界? 当 I 为一个区间 (从而为不可数集) 时, 形如 $\sup_{t\in I}|X_t|$ 的量是不是随机变量? 是否存在确定它们概率分布的方法?

—— 轨道是否在一点连续? 在一个区间上连续? 本书中, 连续性是一个很强的性质. 许多 "具有良好性质" 的过程其轨道或许带跳, 但是两侧的极限都存在.

本节分为三部分. 首先我们研究轨道在可数稠密子集上的性质 (第 17—23 段), 由此引出可分性理论 (第 24—30 段). 在这里我们提醒读者, 可分性理论以后将不会用到, 读者可以跳过这一部分而不会带来任何不便. 其次, 利用解析集理论, 我们直接研究整个 $\mathbb{R}_+$ 上的可测过程 (第 31—34 段). 最后, 我们研究过程的轨道在 "除去零测集外" 的性质 (第 35—45 段).

读者要牢记这一提纲, 这点很重要, 因为同样的性质我们往往从三个不同的角度来研究: 例如定理 18—19、34 和 46, 同样的, 定理 17、33 和 38 也是如此.

记号 16

本节中, 除非特别说明, 过程的时间集合为 $\mathbb{R}_+$. 过程定义在带有 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上. 我们采用如下缩写: "右连续" 简记为右连 (类似的, 左连), "在 $[0,+\infty)$ 上右连续且在 $(0,+\infty)$ 上存在有限左极限" 简记为右连左极[1]. 读者可以类推左连右极和左极右极的含义[2].

可数稠密集上的过程

设 D 为 $\mathbb{R}_+$ 中的可数稠密子集. $(X_s)_{s\in D}$ 是一个以 D 为时间集合的实值适应过程 (即. 对任意 $s \in D$, X_s 是 $\mathcal{F}_s$-可测的). 17

定理 对所有的 $t \geqslant 0$, 我们设

$$\overline{Y}_t^+(\omega) = \limsup_{s\in D, s\downarrow t} X_s(\omega), \quad \underline{Y}_t^+(\omega) = \liminf_{s\in D, s\downarrow t} X_s(\omega). \tag{17.1}$$

则两个过程 $(\overline{Y}_t^+)$ 和 $(\underline{Y}_t^+)$ 均为关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的循序过程. 同样, 定义在 $(0,+\infty)$ 上的过程

$$\overline{Z}_t^-(\omega) = \limsup_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega), \quad \underline{Z}_t^-(\omega) = \liminf_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega) \tag{17.2}$$

均为关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的循序过程.

证 对每个自然数 n, 我们定义过程 (Y_t^n) 如下:

当 $t \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ 时, $Y_t^n = \sup\limits_{s\in D_t} X_s$, 其中 $D_t = D \cap (t, (k+1)2^{-n})$.

对所有的 $\varepsilon > 2^{-n}$, 该过程关于 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 适应. 它是右连续的, 从而它关于 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 是循序的 (定理 15). 同样的结论对过程

$$Y_t = \limsup_{s\in D, s\downarrow\downarrow t} X_s = \lim_n Y_t^n$$

也成立. 由第 14 段我们得到 (Y_t) 关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是循序的. 为处理 $(\overline{Y}_t^+)$, 我们只需注意到

$$\overline{Y}_t^+ = Y_t I_{\{t\notin D\}} + (Y_t \vee X_t) I_{\{t\in D\}}$$

---

[1]英文版注: 法文简写是 càdlàg (continue à drote limites à gauche). 对于任何读过《格列佛游记》的人来说, 这个词听上去都是地道的英语. 因此在英文文献中也被大量使用.

[2]法文版的脚注中指出, Swift 的《格列佛游记》中提到过两个东方的地名, 分别叫 Traldragdubh 和 Trildrogdrib. 既然这两个音都发得出来, 那么左连右极 (làglàd) 和左极右极 (càglàd) 的发音也不会是问题.

即可. 对于过程 (17.1) 和 (17.2) 可以类似讨论. □

下面的定理是贯穿本节的一系列定理中的第一个. 我们沿用第 17 段中的记号.

18 **定理** a) *设 Ω 中使得轨道 $X_.(\omega)$ 在 D 上的限制为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续 (相应的, 右连左极) 映射的 ω 的全体记为集合 W(相应的, W'), 则 W(相应的, W') 为一个 $\mathcal{F}$-解析集的余集 (从而它属于 $\mathcal{F}$ 的普遍完备化 σ-代数). 这一结论可以推广到取值于可度量化余 Souslin 空间 E 的过程.*

b) 对实值过程, 或更一般的, 对取值于波兰空间 E 的过程, 我们有 W' 属于 $\mathcal{F}$.

证 首先证明 a). 我们将可度量化可分空间 E 嵌入到立方体 $I = \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ (当 $E = \mathbb{R}$ 时, 我们就将其嵌入到 $\overline{\mathbb{R}}$) 中. 设 J 为 I 加上孤立点 α 后得到的可度量化紧空间. 我们记

$$X_{t+}(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s\in D, s\downarrow t} X_s(\omega), & \text{如果这一极限在 } I \text{ 中存在}, \\ \alpha, & \text{其他情形}, \end{cases}$$

类似的,

$$X_{t-}(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s\in D, s\uparrow\uparrow t} X_s(\omega), & \text{如果这一极限存在}, \\ \alpha, & \text{其他情形}, \end{cases}$$

对 $t \in D$, 由 $X_{t+}(\omega)$ 的存在性可以推出 $X_{t+}(\omega) = X_t(\omega)$. 映射 $(t,\omega) \mapsto X_{t+}(\omega)$, $X_{t-}(\omega)$ 均为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-可测映射. 由于 $I = \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, 我们可以简化为实值的情形, 在这种情况下我们有

$$X_{t+}(\omega) = \begin{cases} \overline{Y}_t^+(\omega), & \text{当 } \overline{Y}_t^+(\omega) = \underline{Y}_t^+(\omega) \text{ 时}, \\ \alpha, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

我们可以应用定理 17; 同样的对于 X_{t-}, 我们可以利用 $\overline{Z}^-$ 和 $\overline{Z}^+$. 记 A 为集合 $J \setminus E$, 因为 E 为余 Souslin 空间, 所以 A 为 J 中的解析集 (第 III 章定理 19), 且集合

$$H = \{(t,\omega) : X_{t+}(\omega) \in A\} \ \ (\text{相应的}, H' = \{(t,\omega) : X_{t+}(\omega) \in A \text{ 或 } X_{t-}(\omega) \in A\})$$

为解析集, 因为它是一个解析集在一个可测映射下的原像 (第 III 章定理 11). 注意到 W (相应的, W') 的余集为 H (相应的, H') 在 Ω 上的投影, 应用第 III 章定理 13 即得证明.

我们只剩下证明当 E 为波兰空间时, W' 为 $\mathcal{F}$-可测集. 在后面 (定理 23) 我们用另一个完全不同的方法证明一个类似的结论.

我们给定 E 上的距离 d, 使得 E 在 d 下完备. 规定 $d(\alpha, E) = +\infty$. 对 $\varepsilon > 0$, 我们递归定义如下函数:

$$\begin{cases} Z_0^\varepsilon(\omega) = \lim\limits_{s\in D, s\downarrow 0} X_t(\omega), \text{ 如果该极限存在}, \\ T_0^\varepsilon(\omega) = 0. \end{cases}$$

当极限不存在时, 定义

$$Z_0^\varepsilon(\omega) = \alpha,\ T_0^\varepsilon(\omega) = 0.$$

然后定义

$$T_{n+1}^\varepsilon(\omega) = \inf\{t \in D, t > T_n^\varepsilon(\omega), d(X_t(\omega), Z_n^\varepsilon(\omega)) > \varepsilon\}\ (\inf \varnothing = +\infty),$$

$$Z_{n+1}^\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s\in D, s\downarrow T_{n+1}^\varepsilon(\omega)} X_s(\omega), & \text{如果 } T_{n+1}^\varepsilon(\omega) < +\infty, \text{ 并且该极限存在}, \\ \alpha, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

我们容易验证函数 T_n^ε 和 Z_n^ε 在 E^D 上均为 $\mathcal{F}$-可测函数, 再利用下面的引理即可完成证明. □

引理

$$W' = \{\omega \in \Omega : \forall k \in \mathbb{N}, \lim_n T_n^{2^{-k}}(\omega) = +\infty\}.$$

证 a) 如果 $\omega \in W'$, 那么 ω 在 D 上的限制为一个从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的右连续映射. 由右连续性可知上述定义中的极限始终存在, 并且对于所有满足 $T_n^\varepsilon(\omega) < +\infty$ 的 ε 和 n, 有

$$T_{n+1}^\varepsilon(\omega) > T_n^\varepsilon(\omega),\ \text{且当 } T_{n+1}^\varepsilon(\omega) < +\infty \text{ 时},\ d(Z_n^\varepsilon(\omega), Z_{n+1}^\varepsilon(\omega)) \geqslant \varepsilon.$$

所以当 $T_{n+1}^\varepsilon(\omega) < +\infty$ 时, ω 在区间 $[T_n^\varepsilon(\omega), T_{n+1}^\varepsilon(\omega)]$ 上的振幅至少为 ε, 且左极限的存在性使得 $T_n^\varepsilon(\omega)$ 不会收敛到有限点. 从而对任意的 $\varepsilon > 0$, $\lim_n T_n^\varepsilon(\omega) = +\infty$.

b) 反之, 假设 $T_n^\varepsilon(\omega) \to +\infty$, 我们定义从 D 到 E 的右连左极映射 f_ε 为

$$\text{当 } t \in D \cap [T_n^\varepsilon(\omega), T_{n+1}^\varepsilon(\omega)) \text{ 时}, f_\varepsilon(t) = Z_n^\varepsilon(\omega).$$

于是对所有的 $t \in D$, $d(X_t(\omega), f_\varepsilon(t)) \leqslant 2\varepsilon$. 如果上述性质当 ε 趋于 0 时成立, 例如 $\varepsilon = 2^{-k}$, 那么我们得到, $X_.(\omega)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的一列右连左极映射在 D 上的一致极限. 从而它可以延拓为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连左极映射. □

注 a) 定理 18 可以写成 "典则" 形式. 我们考虑集合 W(相应的, W') 为从 $\mathbb{R}_+$ 到可度量化余 Souslin 空间 E 上的右连续 (相应的, 右连左极) 映射的全体, 考虑其上由坐标映射生成的 σ-代数. 把每个 $\omega \in W$ (相应的, W') 映到它在 D 上的限制的映射是从 W (相应的, W') 到 $\Omega = E^D$ 及其 Borel σ-代数的可测同构. 当 E 为波兰空间时, Ω 为余 Souslin 波兰空间. 对 Ω 上坐标映射组成的过程 $(X_t)_{t\in D}$ 应用定理 18, 我们得到 W' 为 Ω 中某个解析集的余集, 并且当 E 为波兰空间时, W' 为 Ω 中的 Borel 子集. 从而当 E 为波兰空间时, 可测空间 W 为余 Souslin 空间, 并且可测空间 W' 为 Lusin 空间. 从证明中可以看出, W(相应的, W') 上有一种余 Souslin(相应的, Lusin) 拓扑, 就是 D 上的点点收敛拓扑. 由于涉及一个任意的可数稠密子集 D 的选取, 这一拓扑一般并不吸引人, 因为关于可测性的陈述是内蕴的. 19

当 E 为波兰空间时, 存在 W' 上的一个有趣的拓扑: Skorokhod 拓扑, 在其下 W' 为波兰空间. 读者可以参考 Maisonneuve [1].

b) 我们在 E 中加入一个孤立点 ∂, 记 Ω 为从 $\mathbb{R}_+$ 到 $E\cup\{\partial\}$ 满足在首次取到 ∂ 后保持值不变的右连续映射 ω 全体, 从而集合 $\{t:\omega(t)=\partial\}$ 为一个闭区间 $[\zeta(\omega),+\infty)$ (可能为空集). 我们容易看出当 E 为余 Souslin 空间时, 生存时 ζ 关于 Ω 上由坐标映射生成的 σ-代数 $\mathcal{F}^\circ$ 是可测的, 并且 Ω 在 D 上的点点收敛拓扑下为余 Souslin 空间. 另一方面, 当 E 为波兰空间时, 设 Ω' 为 Ω 中在区间 $(0,\zeta(\omega))$ 的每一点上 (但未必在 $\zeta(\omega)$ 上) 存在 E 中的左极限的元素 ω 的全体, 则 Ω' 在 D 上的点点收敛拓扑下为 Lusin 空间. 证明方法与定理 18 相同, 我们只需将 $\lim_n T_n^\varepsilon=+\infty$ 换为 $\lim_n T_n^\varepsilon\geqslant\zeta$ 即可.

上穿次数和下穿次数

我们给出前面关于右连左极函数的结果的某些变体. 此时我们不再要求映射右连续且左极限存在, 只要求其左右极限均存在. 这些结果本身并不十分有趣, 但是上穿次数和下穿次数在鞅论中非常重要.

20　设 f 为从 $\mathbb{R}_+$ 到分离空间 E 的一个映射. 如果对 $\mathbb{R}_+$ 中的每一点 t,

$$f(t+)=\lim_{s\downarrow\downarrow t}f(s)$$

在 E 中存在, 并且对 $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ 中的每一点 t, 左极限

$$f(t-)=\lim_{s\uparrow\uparrow t}f(s)$$

亦在 E 中存在 (不要求其在无穷处存在), 那么称 f 没有振荡不连续点[①]. 首先我们考虑实值函数, 并且 (参照 Doob) 给出一个判断没有振荡不连续点的简单准则.

21　设 f 为 $\mathbb{R}_+$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的映射, a 和 b 为两个有限实数且 $a<b$. 设 $\mathbf{u}$ 为 $\mathbb{R}_+$ 中的有限子集, 其中的元素为 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ (由小到大排列). 我们递归定义时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in\mathbf{u}$ 如下:

t_1 为 $\mathbf{u}$ 中第一个满足 $f(s_i)<a$ 的元素 s_i, 若上述元素不存在, 则记 $t_1=s_n$.

对每个介于 1 和 n 之间的偶数 (相应的, 奇数), t_k 为 $\mathbf{u}$ 中第一个满足 $s_i>t_{k-1}$ 并且 $f(s_i)>b$ (相应的, $f(s_i)<a$) 的元素 s_i. 若上述元素不存在, 则记 $t_k=s_n$.

我们考虑满足

$$f(t_{2k-1})<a,f(t_{2k})>b$$

的最后一个偶数 $2k$. 若上述偶数不存在, 则记 $k=0$. $\mathbf{u}$ 中的区间

$$(t_1,t_2),(t_3,t_4),\cdots,(t_{2k-1},t_{2k})$$

[①] Bourbaki 称之为 "规则化的函数". 俚语里为 "右极左极" 函数 (参见第 16 段).

表示函数 f 从 a 的下方“上穿”到 b 的上方的时间段, 而中间间隔的区间表示“下穿”时间段. 整数 k 称为 (在 $\mathbf{u}$ 上考虑) f 上穿区间 $[a,b]$ 的次数, 记为

$$M(f;\mathbf{u};[a,b]). \tag{21.1}$$

同样的, 我们定义 (在 $\mathbf{u}$ 上考虑) f 下穿区间 $[a,b]$ 的次数:

$$D(f;\mathbf{u};[a,b]) = M(-f;\mathbf{u};[-b,-a]). \tag{21.2}$$

我们也可以定义上穿和下穿区间 (a,b) 的次数, 只需在时刻 t_i 的定义中用非严格不等式代替严格不等式即可[①].

设 S 为 $\mathbb{R}_+$ 中的任一子集. 记

$$M(f;S;[a,b]) = \sup_{\mathbf{u}\text{ 有限},\mathbf{u}\subset S} M(f;\mathbf{u};[a,b]). \tag{21.3}$$

定义 (21.2) 可以类似推广.

上穿次数和下穿次数的主要意义来自于如下定理:

定理 设 f 为 $\mathbb{R}_+$ 上取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数. f 没有振荡不连续点的充分必要条件为, 对每一对满足 $a<b$ 的有理数 a 和 b 以及 $\mathbb{R}_+$ 中的任意紧区间 I, 有 22

$$M(f;I;[a,b]) < +\infty. \tag{22.1}$$

证 假设存在一点 t 是函数 f 的振荡不连续点, 例如, 在 t 点 f 的左极限不存在. 那么我们可以找到一列递增收敛到 t 的序列 t_n, 满足

$$\liminf_{n\to\infty,n\text{ 为奇数}} f(t_n) = c > d = \limsup_{n\to\infty,n\text{ 为偶数}} f(t_n).$$

取充分大的区间 I 和满足 $d<a<b<c$ 的有理数 a 和 b. 通过除去由点 t_n 组成的集合中的有限子集, 我们马上可以验证 $M(f;I;[a,b]) = +\infty$.

逆命题可以利用下面读者很容易证明的性质得到. 若 r,s,t 为满足 $r<s<t$ 的三个时刻, 则

$$M(f;[r,t];[a,b]) \leqslant M(f;[r,s];[a,b]) + M(f;[s,t];[a,b]) + 1.$$

设 α 和 β 为 I 的两个端点, 若函数 f 没有振荡不连续点, 则对每个 $t\in I$, 存在一个包含 t 的开区间 I_t, 使得 f 在区间 $I_t\cap(t,\beta]$ 和 $[\alpha,t)\cap I_t$ 上的振荡都严格小于 $b-a$. 我们可以用有限个区间 $I_{t_1},I_{t_2},\cdots,I_{t_k}$ 覆盖区间 I. 对 α 和 β 以及点

①上穿次数和下穿次数 $M(f;\mathbf{u};[a,b]),D(f;\mathbf{u};[a,b])$ 的优点是, 它们定义了 f 在点点收敛拓扑下的下半连续函数. 这一性质可以推广到任意集合 S 上的上穿或下穿次数.

$t_1, t_2, \cdots, t_k$ 和区间 $I_{t_1}, I_{t_2}, \cdots, I_{t_k}$ 的端点由小到大排序, 我们得到一个有限点集: $\alpha = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \beta$, 使得 f 在每个区间 (s_i, s_{i+1}) 上的振幅小于等于 $b-a$, 于是我们有 $M(f;(s_i, s_{i+1});[a,b]) = 0$, 进而有 $M(f;[s_i, s_{i+1}];[a,b]) \leqslant 1$. 综上即得

$$M(f;I;[a,b]) \leqslant 2n-1.$$

因此逆命题成立. □

注 上述讨论中的函数取值于 $\overline{\mathbb{R}}$. 利用上穿次数, 我们同样可以处理 $\mathbb{R}_+$ 上具有有限左右极限的 (有限) 函数. 由于具有有限左右极限的函数在每一点的邻域中有界, 从而它在每个紧区间 I 上有界. 我们有, 对任意有理数 a,

$$\lim_n M(f;I;[a,a+n]) = 0 = \lim_n M(f;I;[a-n,a]). \tag{22.2}$$

反之, 例如当 f 不是上方有界函数时, 我们可取某个 a 使得对所有的 n, (22.2) 的左端大于等于 1.

我们给出上穿次数在随机过程中的主要应用.

23 **定理** *设 E 为具有可数基的局部紧空间, 过程 $(X_t)_{t\in D}$ 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上, 时间集合为可数稠密子集 D, 且取值于 E 中. 则所有满足下述条件的 $\omega \in \Omega$ 组成的集合是 $\mathcal{F}$-可测的: 轨道 $X_\cdot(\omega)$ 可以延拓为从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的没有振荡不连续点的映射.*

证 我们可以假设 E 为紧度量空间 F 中的一点 x_0 的余集, 其上的距离记为 d. 设 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 为 E 中的一个稠密序列. 对 $n \geqslant 1$, 记 $h_n(x) = d(x_n, x)$ (这样序列 (h_n) 为分离点集的连续函数族), $h_0(x) = 1/d(x_0, x)$. 我们想要表明每个实值过程 $(h_n \circ X_t)_{n\geqslant 1}$ 沿着 D 的左右极限都存在, 并且过程 $(h_0 \circ X_t)$ 沿着 D 的左右极限有限. 通过在 D 上考虑轨道的上穿次数我们即得结论. □

注 a) 我们可以将这一结果推广到 E 为波兰空间的情形. 因为 E 可以看成一个紧度量空间中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集 (第 III 章定理 17), 从而它为具有可数基的局部紧空间 E_n 的交集, 于是我们对每一个 E_n 写出前面的条件. 当 E 为余 Souslin (特别的, Lusin) 空间时, 定理中的集合是一个 $\mathcal{F}$-解析集的余集: 我们把这个命题放在一边.

b) 此处我们关心的是右连左极或右极左极的映射, 但是我们可以类似地考虑连续映射. 这时的方法就十分经典了: 为了说明从 D 到波兰空间 E 的映射可以延拓为从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的连续映射, 我们只需要对每个自然数 n, $D\cap[0,n]$ 上的映射满足一致连续性条件.

可数集的选取: 可分性

我们再次强调, 第 24—30 段中的结果以后并不会用到, 读者可以忽略.

24 随后几段中处理的问题如下: 怎样判断一个给定的过程 (X_t) 存在一个修正 (Y_t)

具有某些良好性质: 例如, 轨道右连左极的修正, 或者比较困难的, 轨道有界的修正. 这是一个非常自然的问题, 我们将在后面研究另一个同样类型的问题, 涉及 "几乎修正". 但是我们必须认识到, 有时修正一个给定的过程是被禁止的. 一个很好的例子即为第 5 段中的过程: 设 (B_t) 是初值为 0, 轨道连续的一维布朗运动. 考虑过程

(24.1) $$X_t = \begin{cases} 0, & \text{当 } B_t \neq 0 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } B_t = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

如果我们仅仅是寻找具有规则轨道的修正, 那么不必多耗费精力, 只需简单地取修正 $Y_t \equiv 0$ 即可. 这里可分性理论将会破坏过程的结构.

关于连续时间过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 的可分性理论是由 Doob 所发展的. 将其推广到时间集合为具有可数基的拓扑空间的情形没有实质性困难. 不过在这里, 我们研究时间集合为 $\mathbb{R}_+$ 的过程, 其中 $\mathbb{R}_+$ 带有不具可数基的右拓扑[①]. 这一推广归功于钟开莱 (Chung-Doob[2]). 另一方面, 这一理论可以推广到取值于可度量化紧空间的过程, 但是此处我们仅考虑取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的过程 (注意: 这里 $\overline{\mathbb{R}}$ 和 $\mathbb{R}$ 的区别很重要).

下面一般形式的定义或许更为清楚. 25

定义 *设 f 为从拓扑空间 T 到拓扑空间 E 的映射, D 为 T 中的稠密子集. 如果集合 $(t, f(t)), t \in D$ 在 f 的图像中 (关于 $T \times E$ 上的拓扑) 稠密, 那么我们称 f 是 D-可分的.*

从现在开始, 我们取 $T = \mathbb{R}_+$, 其上的拓扑为右拓扑, 并且设 $E = \overline{\mathbb{R}}$. 另一方面, 我们将总是考虑 D 为可数集的情形, 此时我们称 f 是右 D-可分的 (如果考虑的是 $\mathbb{R}_+$ 上的通常拓扑, 那么就称为 D-可分的).

定义 *设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的过程. 如果存在可数稠密子集 D, 满足对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 轨道 $X_\cdot(\omega)$ 是右 D-可分的, 那么我们称 (X_t) 是右可分的.* 26

这时我们可以解决第 24 段中的问题: 若轨道在 D 上有界, 则它处处有界, 等等. 随后的引理为钟开莱对 Doob 的结果 (Stochastic Processes, 第 56–57 页) 的一个修正.

定理 *设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的过程. 则存在可数稠密子集 D, 满足下列性质: 对 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的任意闭集 F 和右拓扑下的任意开集 $I \subset \mathbb{R}_+$, 有* 27

(27.1) $$\forall u \in I, \mathbb{P}\{\text{对所有的 } t \in D \cap I, X_t \in F, X_u \notin F\} = 0.$$

---

① 我们回顾一下, $x \in \mathbb{R}_+$ 在右拓扑下的邻域为包含区间 $[x, x+\varepsilon), \varepsilon > 0$ 的集合, 从而左闭区间 $[a, b)$ 在右拓扑下是个闭集!

并且对任意可数集 S,

$$\text{(27.2)} \qquad \mathbb{P}\{\text{对所有的 } t \in D \cap I, X_t \in F\} \leqslant \mathbb{P}\{\text{对所有的 } t \in S \cap I, X_t \in F\}.$$

证 (27.1) 和 (27.2) 的等价性是容易证明的, 我们留给读者. 取 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的闭子集组成的可数集 $\mathcal{H}$, 使得任何一个闭集都为 $\mathcal{H}$ 中一列递减元素的交; 取 $\mathbb{R}_+$ 中在通常拓扑下的开子集组成的可数集 $\mathcal{G}$, 使得 $\mathbb{R}_+$ 中 (在通常拓扑下) 的任何一个开集都为 $\mathcal{G}$ 中一列递增元素的并. 对每一对 $(I,F), I \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{H}$, 我们取 I 中的可数稠密子集 $\triangle(I,F)$, 使得概率

$$\mathbb{P}\{\text{对所有的 } t \in S \cap I, X_t \in F\} \quad (S \text{ 可数})$$

在 $S = \triangle(I,F)$ 处达到最小值. 对 $I \in \mathcal{G}$, 记 $\triangle(F) = \cup\triangle(I,F)$, 则对任意通常意义下的开集 I 和任意可数集 S, 我们都有

$$\text{(27.3)} \qquad \mathbb{P}\{\text{对所有的 } t \in \triangle(F) \cap I, X_t \in F\} \leqslant \mathbb{P}\{\text{对所有的 } t \in S \cap I, X_t \in F\}.$$

固定 $F \in \mathcal{H}$, 对大于 0 的有理数 r, 我们考虑 $[0,r)$ 上的增函数

$$h_r(t) = \inf_S \mathbb{P}\{\text{对所有的 } u \in S \cap [t,r), X_u \in F\} \quad (S \text{ 可数}).$$

将其与下式相比较:

$$k_r(t) = \mathbb{P}\{\text{对所有的 } u \in \triangle(F) \cap [t,r), X_u \in F\}.$$

由 $\triangle(F)$ 的选取方式, 我们有, 对所有的 t, $h_r(t+) = k_r(t+)$, 从而 h_r 和 k_r 仅在一个可数集 N_r 上不同. 如果我们将 $\triangle(F)$ 扩大为 $\triangle(F) \cup (\cup_r N_r)$, 仍记为 $\triangle(F)$, 那么对任意有理数 r 和任意 $t \in [0,r]$, 我们有 $h_r(t) = k_r(t)$. 取极限即知同样的结论对所有的实数 r 均成立. 从而对任意区间 $[t,r)$,

$$\text{(27.4)} \qquad \mathbb{P}\{\text{对所有的 } u \in \triangle(F) \cap [t,r),\ X_u \in F, \text{ 且 } X_t \notin F\} = 0.$$

现在设 I 为右拓扑下的开集: I 为可数个形如 (t_i, r_i) 或 $[t_j, r_j)$ 的两两不相交区间的并集, 则对所有的 $t \in I$, 概率

$$\mathbb{P}\{\text{对所有的 } u \in \triangle(F) \cap I,\ X_u \in F, \text{ 且 } X_t \notin F\}$$

等于零: 当 t 为通常意义下 I 的内点时, 由 (27.2) 即得; 当 t 为区间 $[t_j, r_j)$ 的左端点时, 由 (27.3) 即得.

为得到定理中的集合 D, 使得对所有的闭集均满足上述性质, 我们只需取可数集 $\triangle(F)$ 的并即可, 其中 F 取遍可数集 $\mathcal{H}$. □

我们现在来给出 Doob 的两个定理, 前者关于任意的过程, 后者关于可测过程. 28
我们先来给出两个例子.

—— 设 Ω 为一个单点集, 则一个过程就是 $\mathbb{R}_+$ 上的一个函数 $f(t)$. (27.1) 告诉我们存在某个 D, 使得

$$(\text{对 } t \in D \cap I, f(t) \in F) \Leftrightarrow (\text{对 } t \in I, f(t) \in F).$$

从而 f 为右 D-可分函数, 进而 "过程" f 是右可分的. 但是由它的可分性我们推不出函数 f 的任何正则性.

—— 我们回到例 (24.1). 对任意可数集 D, 我们有 $\mathbb{P}\{X_u = 0, u \in D\} = 1$, 而对几乎所有的 ω, 集合 $\{u : X_u(\omega) = 1\}$ 都不是空集. 从而过程是不可分的, 并且任何使它可分的尝试都会使其与 0 不可区别. 因此研究它没有意义.

定理 任何一个实值过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 都存在取值于 $\overline{\mathbb{R}}$[①] 中的右可分修正. 29

证 固定 $t \in \mathbb{R}_+$. 我们取定理 27 中的集合 D, 记集合 $A_t(\omega)$ 为函数 $X_.(\omega)$ 从右侧沿着 D 趋于 t 点时在 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的 (非空) 闭包, 即

$$A_t(\omega) = \bigcap_n \overline{\{X_u(\omega), u \in D \cap [t, t+1/n)\}},$$

于是满足 $X_t(\omega) \in A_t(\omega)$ 的 ω 组成的集合可测. 设 d 为定义了 $\overline{\mathbb{R}}$ 上拓扑的一个距离, 则条件 $X_t(\omega) \in A_t(\omega)$ 等价于

$$\forall n > 0,\ \forall m > 0,\ \exists u \in [t, t+1/n) \cap D,\ d(X_t(\omega), X_u(\omega)) < 1/m.$$

我们可以证明, 对几乎所有的 ω, $X_t(\omega) \in A_t(\omega)$. 事实上, 假设 $X_t(\omega) \in A_t(\omega)$ 不成立, 我们考虑第 27 段中由闭集组成的可数集类 $\mathcal{H}$: 存在 $\mathcal{H}$ 中包含 $A_t(\omega)$ 的元素 F, 使得 $X_t(\omega) \notin F$, 从而存在 m 使得 $d(X_t(\omega), F) > 1/m$. 设 $F_m = \{x : d(x, F) \leqslant 1/m\}$, 则因为 F_m 为沿着 D 在 t 点的聚点组成的集合的邻域, 对充分大的 n, 对所有的 $u \in D \cap [t, t+1/n)$, 我们有 $X_u(\omega) \in F_m$. 从而适当地选取 n, m 和 $F \in \mathcal{H}$, 我们有 $\omega \in H(n, m, F)$, 其中 $H(n, m, F)$ 表示集合

$$\{\omega : \text{当 } u \in D \cap [t, t+1/n) \text{ 时}, X_u(\omega) \in F_m, X_t(\omega) \notin F_m\}.$$

由 D 的选取方式, 这一事件的概率为零, 从而 $H(n, m, F)$(n, m 为自然数, $F \in \mathcal{H}$) 的并集的概率亦为零, 而我们已经看到这一并集包含集合 $\{X_t \notin A_t\}$.

我们只要规定

$$X'_t(\omega) = \begin{cases} X_t(w), & \text{当 } X_t(\omega) \in A_t(\omega) \text{ 时}, \\ \liminf\limits_{s\downarrow t, s\in D} X_s(\omega)^{②}, & \text{其他情形}, \end{cases}$$

①但可能不是取值于 $\mathbb{R}$ 的.

②这里取值有可能为 $\pm\infty$.

即可得所求的修正. □

Doob 的第二个定理给出过程的右可分循序可测修正的存在性.

30 **定理** 设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的过程, L^0 是 Ω 上的数值随机变量的等价类空间, 具有依概率收敛定义的度量, $\dot{X}_t$ 为随机变量 X_t 作为 L^0 中元素的等价类.

(X_t) 存在可测修正当且仅当映射 $t\mapsto \dot{X}_t$ 为可测阶梯函数 (在 L^0 中) 的一致极限.

当这一条件成立时, (X_t) 有一个可测右可分修正. 更确切的, 当这一条件成立并且 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应时, 我们可以选取一个右可分 $(\mathcal{F}_{t+})$ 循序可测的修正.

证 我们容易证明定理中的条件等价于: $t\mapsto \dot{X}_t$ 在通常意义下可测 (即 L^0 中的任意 Borel 集的原像为 $\mathbb{R}_+$ 中的 Borel 集), 并且它取值于 L^0 中的一个可分子集. 这一条件是可测性的 "好定义", 例如, 在取值于 Banach 空间的积分理论中使用.

空间 $\overline{\mathbb{R}}$ 同胚于区间 $I=[-1,1]$. 利用这一同胚我们用 I 代替 $\overline{\mathbb{R}}$ 并且用 L^1 中的范数收敛代替依概率收敛. 这样, 余下的证明中我们将用 L^1 代替 L^0.

a) 假设 (X_t) 可测, 我们来证明上述条件成立. 设 $\mathcal{H}$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的数值可测过程 (Y_t) 组成的集合, 其中 Y_t 满足: (Y_t) 一致有界; 并且从 $\mathbb{R}_+$ 到 L^1 的映射 $t\mapsto \dot{Y}_t$ 为取值于 L^1 的一个可分子集中的 Borel 映射. 我们考虑如下形式的过程

$$Y_t(\omega)=\sum_{k\in\mathbb{N}} I_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(t)Y^k(\omega),$$

其中 n 取遍 $\mathbb{N}$ 且 Y^k 为任意的一致有界随机变量. 显然, 这些过程全体组成一个包含于 $\mathcal{H}$ 中的代数, 并且它们生成 σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$. 另一方面, $\mathcal{H}$ 在一致有界单调收敛下封闭. 由单调类定理, 我们可以推出任意有界可测过程 (X_t) 都属于 $\mathcal{H}$, 于是由第 I 章第 17 段得到定理中的条件成立.

b) 反之, 设 (X_t) 为取值于 I 中且满足上述条件的一个 $(\mathcal{F}_t)$ 适应过程 (若不给定 σ-代数流, 则对所有的 t, 取 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}$). 考虑满足对所有的 t, $\|X_t-Z_t^n\|\leqslant 2^{-n}$ 的阶梯过程 (Z_t^n), 记

$$Z_t^n(\omega)=\sum_k I_{A_k^n}(t)H_k^n(\omega), \tag{30.1}$$

其中 A_k^n 为 $\mathbb{R}_+$ 的一个分划, H_k^n 为取值于 I 的随机变量. 首先我们将这些过程变为 $(\mathcal{F}_{t+})$ 适应过程.

设 s_k^n 为 A_k^n 的下确界, (t_i) 为 A_k^n 中收敛到 s_k^n 的递减元素列 (当 $s_k^n\in A_k^n$ 时, 序列可能为常数序列). 因为随机变量 X_{t_i} 一致有界, 如有必要, 用 (t_i) 的子列代替 (t_i), 我们可以假设 X_{t_i} 在 L^1 中弱收敛到一个 $\mathcal{F}_{s_k^n+}$-可测的随机变量 L_k^n[①] (参见第

① 我们感谢 Hoffmann-Jørgensen 对第一版中此处出现的一个错误所做的订正.

II 章定理 25). 我们有 $\|X_{t_i}-H_k^n\|_1 \leqslant 2^{-n}$, 从而 $\|L_k^n-H_k^n\|_1 \leqslant 2^{-n}$. 因为这个范数, 作为一族线性泛函的上包络, 是弱拓扑下的下半连续函数. 所以过程

$$Y_t^n(\omega)=\sum_k I_{A_k^n}(t)L_k^n(\omega) \tag{30.2}$$

为 $(\mathcal{F}_{t+})$ 循序过程, 并且对所有的 n 和 t, $\|X_t-Y_t^n\|_1 \leqslant 2\cdot 2^{-n}$. 我们记

$$Y_t(\omega)=\liminf_n Y_t^n(\omega). \tag{30.3}$$

这一过程仍为循序过程. 另一方面, 对每个固定的 t, Y_t^n 几乎必然收敛到 (X_t) (第 II 章第 10 段). 从而 (Y_t) 为 (X_t) 的修正.

c) 这个修正还未必是右可分的. 关于 (X_t) 或 (Y_t) 我们考虑第 27 段中的集合 D. 因为它们互为修正, 所以它们对应于同一个 D. 如第 29 段中所述, 记

$$A_t^n(\omega)=\overline{\{Y_u(\omega),u\in D\cap[t,t+1/n)\}},\ A_t(\omega)=\bigcap_n A_t^n(\omega).$$

设 d 为 I 上的通常距离, 则过程 $d(Y_t(\omega),A_t^n(\omega))=\sup_{s\in D} d(Y_t(\omega),Y_s(\omega))I_{(s-1/n,s]}(t)$ 关于 $(\mathcal{F}_{t+1/n})$ 是循序的, 从而过程 $d(Y_t,A_t)$ 是一个 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 循序过程, 进而 (第 14 段) 它是一个 $(\mathcal{F}_{t+})$ 循序过程. 我们只需如第 29 段中定义

$$X_t'=\begin{cases} Y_t, & \text{当 } d(Y_t,A_t)=0 \text{ 时, 即当 } Y_t\in A_t \text{ 时,}\\ \liminf\limits_{s\downarrow t,s\in D} Y_t, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

这即为所求的修正. □

注 a) 设 $\mathcal{G}$ 为由 $X_t,t\in\mathbb{R}_+$ 生成的 σ-代数. 如果取值于 $L^0(\mathcal{F})$ 中的映射 $t\mapsto \dot{X}_t$ 为 Borel 映射, 并且它取值于一个可分子集, 那么它关于 $L^0(\mathcal{G})$ 满足同样的条件. 由上述证明, 存在形如 (30.1) 的阶梯过程依概率一致收敛到 (X_t):

$$Z_t^n=\sum_k I_{A_k^n}(t)H_k^n(\omega), \tag{30.4}$$

其中 H_k^n 是 $\mathcal{G}$-可测的. 由第 I 章第 18 段, 每个随机变量 H_k^n 有如下表示:

$$H_k^n=h_k^n(X_{t_p^{nk}})\quad (p\in\mathbb{N}), \tag{30.5}$$

其中 $(t_p^{nk})_{p\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathbb{R}_+$ 中的序列, h_k^n 为 $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ 上的 Borel 函数. 我们容易看出由 (30.4) 和 (30.5) 给出的 (Z_t^n) 依概率一致收敛到 (X_t) 的性质仅依赖于过程 (X_t) 的时间分布. 换句话说, 存在可测修正这一性质仅依赖于过程的时间分布[①].

b) 沿用上述记号. 如果过程 (X_t) 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$-可测的, 那么它有一个 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{G}$-可测的修正 (X_t'). 但是由 X_t' 生成的 σ-代数 $\mathcal{G}'$ 可能严格包含于 $\mathcal{G}$ 中, (X_t') 未必是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{G}'$-可测的 (即 (X_t') 未必 "自然可测"). 对循序过程我们也有同样的困难.

①关于这个问题, 参见第 46 段.

随机闭集、停时

到目前为止, 我们研究了过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 可以由 $(X_t)_{t\in D}$ 的性质得到的那些性质, 其中 D 为可数稠密集. 现在假设 (X_t) 可测 (更精确的, 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 循序可测; 若不给定其上的 σ-代数流, 则取确定性 σ-代数流 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$), 我们利用容度理论中的定理 III.44 直接研究其轨道在 $\mathbb{R}_+$ 上的性质.

31 **定义** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为带有 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 的概率空间, A 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集. 我们记 (a_t) 为 "A 的示性" 随机过程

(31.1) $$a_t(\omega) = I_A(t, \omega).$$

当 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ (即过程 (a_t) 可测) 时, 我们称 A 为可测随机集; 当 (a_t) 为循序过程时, 我们称 A 为循序集. 如果对所有的 ω, 截口 $A(\omega) = \{t \in \mathbb{R}_+ : (t, \omega) \in A\}$ 为 $\mathbb{R}_+$ 中的闭集 (相应的, 右闭集、左闭集), 我们称 A 为闭集 (相应的, 右闭集、左闭集).

这里我们有必要回忆一下, $\mathbb{R}_+$ 中的 "右闭区间"$(a, b]$ 或 $[a, b]$ 在 $\mathbb{R}_+$ 的左拓扑下为闭集, 从而它们为左闭集.

$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的循序集生成的 σ-代数称为循序 σ-代数; 循序过程为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上关于这个 σ-代数可测的函数.

给定 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集 A, A 的闭包 $\overline{A}$ 是截口为 $\overline{A}(\omega)$ 的集合, 其中对所有的 $\omega \in \Omega$, $\overline{A}(\omega)$ 为截口 $A(\omega)$ 的闭包. 我们可以类似定义 A 的右闭包和左闭包. 下面的定理为本节中结果的关键.

32 **定理** 设空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 完备, $\mathcal{F}_0$ 包含所有零测集, 并且 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续, 则循序集的闭包 (相应的, 右闭包、左闭包) 为循序集.

证 首先设 A 为可测随机集. 对所有的 $s \geqslant 0$, 我们定义

(32.1) $$D_s(\omega) = \inf\{t > s : (t, \omega) \in A\} \qquad (\inf \varnothing = +\infty).$$

显然, $D_{\cdot}(\omega)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的右连续递增函数. 另一方面, 由第 III 章第 44 段, D_s 关于 $\mathcal{F}$ 的完备化是可测的, 即 D_s 是 $\mathcal{F}$-可测的. 由定理 15, 过程 (D_s) 可测. 同理, 过程 $(D_{s-})_{s>0}$ 亦可测.

在右拓扑下, A 的聚点组成的集合为 $\{(s, \omega) : D_s(\omega) = s\}$, 并且该集合可测, 从而 A 的右闭包可测. 同理, A 的左闭包为集合 $\{(s, \omega) : s > 0, D_{s-}(\omega) = s\} \cup A$[①], 它也可测. 取它们的并集, 即得 A 的闭包 $\overline{A}$ 可测.

循序性由此直接可得: 通过 $[0, \infty)$ 到 $[0, t)$ 上的一个递增双射, 我们可以将前面在 $[0, \infty) \times \Omega$ 上所做的工作转移到 $[0, t) \times \Omega$ 上, 从而 $A \cap ([0, t) \times \Omega)$ 在 $[0, t) \times \Omega$ 中

① 只是为了把时刻 $t = 0$ 也考虑进来, 我们才需要加上 A.

的闭包关于 σ-代数 $\mathcal{B}([0,t))\times\mathcal{F}_t$ 是可测的. 由第 14 段的注我们得到 A 关于 σ-代数流 $\mathcal{F}_{t+}=\mathcal{F}_t$ 是循序集. □

下面为定理 32 的加强形式.

定理 关于空间和 σ-代数流的假设与定理 32 相同. 设 (X_t) 为实值循序过程, 则下面的过程均是循序的: 33

a) $X_t^*=\sup_{s\leqslant t}X_s$.

b) $\overline{Y}_t^+=\limsup_{s\downarrow t}X_s, \underline{Y}_t^+=\liminf_{s\downarrow t}X_s$ 以及类似的从左边定义的极限过程.

c) $\overline{Z}_t^+=\limsup_{s\downarrow\downarrow t}X_s, \underline{Z}_t^+=\liminf_{s\downarrow\downarrow t}X_s$ 以及类似的从左边定义的极限过程.

证 a) 我们记 $L_0=-\infty$. 当 $t>0$ 时, 记 $L_t=\sup_{s<t}X_s$. 因为 $X_t^*=L_t\vee X_t$, 我们只需证明 (L_t) 是循序的. 而我们知道, 这一过程是左连续的: 由定理 15, 我们只需证明 L_t 是 $\mathcal{F}_t$-可测的. 由于集合 $\{L_t>a\}$ 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$-可测集

$$\{(s,\omega):s<t,X_s(\omega)>a\}$$

在 Ω 上的投影, 从而它为 $\mathcal{F}_t$-解析集, 又因为 $\mathcal{F}_t$ 完备, 所以它为 $\mathcal{F}_t$-可测集.

对于 b) 和 c), 我们仅考虑 $\overline{Y}^+$ 和 $\overline{Z}^+$ 的情形. 由于 $\overline{Y}_t^+=X_t\vee\overline{Z}_t^+$, 我们只需考虑过程 $\overline{Z}^+$. 注意到 $\overline{Z}_t^+(\omega)\geqslant a$ 当且仅当对所有的 $\varepsilon>0, t$ 为集合 $\{s:X_s(\omega)>a-\varepsilon\}$ 的右聚点. 于是我们记 A 为集合 $\{(s,\omega):X_s(\omega)>a-\varepsilon\}$, 并且回到定理 32 的讨论中: 我们可以看出 A 的右聚点组成的集合可以写成 $\{(s,\omega):D_s(\omega)=s\}$, 从而它可测. 由定理 32 的证明的最后一部分, 我们得到这个集合是循序的. 由此, 我们得到 $(\overline{Z}_t^+)$ 是循序的. □

当我们定义了 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上的可料 σ-代数以后, 可以给出通过左极限定义的过程的可测性结果.

注 与可分性理论遇到的情形相反, 我们没有 (一般的) 方法来计算与定理 33 中定义的过程相关的概率.

我们可以将下面的结果与定理 18 相比较.

定理 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间, (X_t) 为取值于可度量化可分空间 E 的可测过程. 设 Ω 中的子集 $\Omega_{dl},\Omega_d,\Omega_c$ 分别表示使轨道右连左极、右连续、连续的 ω 的全体. 34

当 E 为余 Souslin 空间时, 上述三个集合的余集均为 $\mathcal{F}$-解析集 (从而它们属于 $\mathcal{F}$ 的普遍完备化).

证 我们以 Ω_d 为例给出证明. 取 $\mathbb{R}_+$ 中的可数稠密子集 D, 我们回到定理 18 的证明: 将 E 嵌入到立方体 $I=[0,1]^{\mathbb{N}}$ 中并且加上一个孤立点 α. 如第 18 段中一

样, 我们定义

$$X_{t+}(\omega)=\begin{cases}\lim\limits_{s\downarrow t, s\in D} X_s(\omega), & \text{如果极限在 } I \text{ 中存在,}\\ \alpha, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

于是这个过程可测. 称 $X.(\omega)$ 的轨道在 $\mathbb{R}_+$ 上右连续, 等价于说对于所有的 t, $X_t(\omega)=X_{t+}(\omega)$. 从而 Ω_d^c 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$-可测集 $\{(t,\omega): X_t(\omega)\neq X_{t+}(\omega)\}$ 的投影, 因此它为 $\mathcal{F}$-解析集. □

几乎等价、几乎修正

第 35—45 段中的内容读者在初次阅读时可以省略; 第 39—45 段中的内容在本书余下的部分将不会用到.

35 我们考虑概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上取值于可度量化可分空间 E 的过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. 假设从 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 到 E 的映射 $(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$ 可测, 其中 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上给定了 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 关于测度 $\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ 做完备化后得到的 σ-代数. 我们称满足这一性质的过程 (X_t) 为 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上的 Lebesgue 可测过程. 本小节中我们采用第 5 段中的观点, 我们无法研究随机变量 X_t 本身, 而只能考虑 Ω 上具有如下形式的函数

$$M_\varphi^X(\omega,g)=\int_0^\infty g(X_t(\omega))\varphi(t)\mathrm{d}t, \tag{35.1}$$

其中 g 为 E 上的非负或有界的 Borel 函数, φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上非负可积的 Borel 函数. Lebesgue 意义下的可测性同时保证了积分 (35.1) 的存在性以及函数 $M_\varphi^X(\cdot,g)$ 为完备化后的空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的随机变量.

定义 *两个 (可以定义在不同的概率空间上) 取值于 E 中的 Lebesgue 可测过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 和 $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 称为是几乎等价的, 如果对有限对 (φ_i,g_i) $(1\leqslant i\leqslant n, \varphi_i$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上非负可积的 Borel 函数, g_i 为 E 上的非负 Borel 函数), 取值于 $\mathbb{R}^n$ 的随机变量*

$$(M_{\varphi_1}^X(\cdot,g_1),\cdots,M_{\varphi_n}^X(\cdot,g_n)),\ (M_{\varphi_1}^Y(\cdot,g_1),\cdots,M_{\varphi_n}^Y(\cdot,g_n)) \tag{35.2}$$

具有相同分布.

特别的, 如果对定义在同一个概率空间上的 (X_t) 和 (Y_t), 上式成立, 并且

$$\text{对几乎所有的}t,\ X_t=Y_t\quad \text{p.s.} \tag{35.3}$$

那么我们称它们互为几乎修正.

我们的目的是研究随机过程的那些仅依赖于几乎等价类的性质, 以及选取尽可能好的几乎修正.

注 为定义 (35.1) 中的随机变量, 我们并不需要 X_t 对所有的 t 都有定义; 所有的讨论都能推广到形如 $(X_t)_{t\in T}$ 的随机过程上, 其中 T 为 $\mathbb{R}_+$ 中余集为 Lebesgue 零测集的集合. 我们并不讨论这一类平凡的推广.

$\mathbb{R}$ 上的本质拓扑

在研究几乎等价时, 我们利用 $\mathbb{R}$ 上忽略零测度集的拓扑是非常自然的. 20 世纪初在分析领域中研究导数时已经这么做了. 从前最常用的极限概念是所谓 "近似极限", 即沿着一个密度为 1 的集合的极限, 它是由 Itô 引入概率论的. 但是 Doob, 钟开莱和 Walsh 通过系统地研究直线上的这些很奇怪的拓扑, 发现了另一种拓扑, 即本质拓扑, 更适合概率论的需要. 我们将通过相应的极限概念来定义这个拓扑, 这并不完全正确, 但是可以给出一个直观得多的描述.

回顾一下: 如果 f 为 $\mathbb{R}$ 上的数值函数, 并且 I 为一个区间, $\sup\text{ess}_{s\in I}f(s)$ 是使得集合 $\{s : s\in I, f(s)>c\}$ 在 Lebesgue 测度下为零测集的 c 的下确界. 这一定义并不要求 f 的可测性. f 在一个零测集上变动并不会改变 $\sup\text{ess}_{s\in I}f(s)$ 的值. 由于 $\sup\text{ess}_{s\in I}f(s)$ 为区间 I 的增函数, 我们有下面的定义.

定义 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的 (未必可测的) 数值函数, 对 $t\in\mathbb{R}$, 我们定义 36

$$\limsup_{s\downdownarrows t}\text{ess}f(s)=\lim_{\varepsilon\downdownarrows 0}\sup_{t<s<t+\varepsilon}\text{ess}\,f(s). \tag{36.1}$$

$$\limsup_{s\to t,s\neq t}\text{ess}f(s)=\lim_{\varepsilon\downdownarrows 0}\sup_{t-\varepsilon<s<t+\varepsilon}\text{ess}\,f(s). \tag{36.2}$$

$$\limsup_{s\to t}\text{ess}f(s)=f(t)\vee\limsup_{s\to t,s\neq t}\text{ess}f(s). \tag{36.3}$$

我们留给读者自行完成对于 $\limsup\text{ess}\cdots$ (其中 $\cdots$ 表示 "$s\upuparrows t$", "$s\downarrow t$", "$s\uparrow t$") 和相应的 $\liminf$ 的定义, 以及如果极限存在, 真正的本质极限的定义.

以 (36.2) 为例, 它可以写成在 $\mathbb{R}$ 上的一个真实拓扑 (即本质拓扑) 下的 $\limsup_{s\to t,s\neq t}f(s)$. 对于本质拓扑, 我们给出如下描述: t 的一个本质邻域为一个包含 $\{t\}$ 和 $(t-\varepsilon,t+\varepsilon)\setminus N$ 的 (未必可测的) 集合, 其中 $\varepsilon>0$, N 为一个 Borel 零测集. 类似的, (36.1) 可以写成在 $\mathbb{R}$ 上另一拓扑, 即右本质拓扑下的 $\limsup_{s\to t,s\neq t}f(s)$. 与右本质拓扑对应, 有左本质拓扑. 细节我们留给读者.

我们将本质极限的基本性质总结为两个定理, 前一个关于 $\mathbb{R}$ 上的函数, 后一个关于过程. 从逻辑的角度看, 前一定理为后一定理的特殊情况, 但是我们只给出第一个定理的详细证明.

定理 对 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, 我们记 $\overline{f}$ 为函数 $t\mapsto\limsup\text{ess}_{s\downdownarrows t}f(s)$. 37

a) 如果 $f=g$ 几乎处处成立, 那么 $\overline{f}=\overline{g}$ 处处成立.

b) $\overline{f}$ 为 Borel 函数, 并且

$$\overline{f}(t) = \limsup_{s \downarrow\downarrow t} \operatorname{ess} \overline{f}(s) = \limsup_{s \downarrow\downarrow t} \overline{f}(s). \tag{37.1}$$

c) $f \leqslant \overline{f}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上几乎处处成立.

d) 如果 f 在右本质拓扑下连续, 那么 f 在通常拓扑下右连续.

证 首先我们给出一个引理 (说明 $\mathbb{R}_+$ 上的右拓扑具有第 III 章定义 63 中的 (LL) 性质).

设 $(L_i)_{i\in I}$ 为一族区间 $L_i = [a_i, b_i)$, 则存在 I 中的可数子集 J ,使得 $\cup_{i\in I} L_i = \cup_{i\in J} L_i$.

我们记 $L = \cup_{i\in I} L_i$, $K_i = (a_i, b_i)$, $K = \cup_{i\in I} K_i$. 因为直线上的通常拓扑具有可数基, 从而存在 I 中的可数子集 J_1, 使得 $\cup_{i\in J_1} K_i = K$. 另一方面, 因为集合 $L\setminus K$ 在右拓扑下离散, 所以它可数: 如果 a 属于 $L\setminus K$, 那么存在区间 $I = [a, b) \in (L_i)$, 由于 (a, b) 中的每个点都属于 K, 从而 $I \cap (L\setminus K) = \{a\}$[①]. 现在设 J_2 为 I 中的可数子集, 使得 $L\setminus K \subset \cup_{i\in J_2} L_i$, 我们只需取 $J = J_1 \cup J_2$ 即可.

由此, 对于右本质拓扑, 我们有如下结论: 如果 $I \subset \mathbb{R}_+$ 在右本质拓扑下离散, 那么它的 Lebesgue 外测度为零. 事实上, 对每个 $t \in I$, 我们取区间 $L_t = [t, t+\varepsilon)$ 使得 $L_t \cap I$ 的外测度为零; 由引理, 我们可以用可数个那样的区间覆盖 I, 从而 I 的外测度为零.

现在我们证明定理 37. 性质 a) 显然成立. 同样的, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 集合 $\{f \geqslant \overline{f} + \varepsilon\}$ 在右本质拓扑下离散, 所以 c) 成立. 为证明 $\overline{f}$ 为 Borel 函数, 我们注意到性质 $(\overline{f}(t) \geqslant a)$ 意味着, 对所有的 $\varepsilon > 0$ 和 $r > 0$, 集合 $[t, t+r) \cap \{f > a - \varepsilon\}$ 具有严格正的外测度. 由此我们推出集合 $\{\overline{f} \geqslant a\}$ 在右拓扑下为闭集, 从而它为 Borel 集, 因此 $\overline{f}$ 为 Borel 函数. 同时这也表明 $\overline{f}$ 在右拓扑下为上半连续函数, 从而有

$$\begin{aligned}\overline{f}(t) &\geqslant \limsup_{s\downarrow t} \overline{f}(s) \geqslant \limsup_{s \downarrow\downarrow t} \overline{f}(s) \geqslant \limsup_{s \downarrow\downarrow t} \operatorname{ess} \overline{f}(s) \\ &\geqslant \limsup_{s \downarrow\downarrow t} \operatorname{ess} f(s) = \overline{f}(t).\end{aligned}$$

不等式的第二行由 $f \leqslant \overline{f}$ 几乎处处成立得到, 即 (37.1) 成立.

若 f 在右本质拓扑下连续, 则 $f = \overline{f}$, 从而 f 在右拓扑下为上半连续函数. 对 $-f$ 应用这一结果, 我们得到 f 是右连续的. □

注 当 f 为 Lebesgue 可测时, 我们给出另一种证明 $\overline{f}$ 为 Borel 函数的方法. 我们知道, 在任意概率空间上, 对任意随机变量 X,

$$||X||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||X||_p = \lim_p \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}.$$

① 这一句是按照英文版翻译的. 法文版原文证明有误, 这里的证明是钟开莱的想法.

从而对非负有界函数 f, 我们有

$$\sup_{t<s<t+\varepsilon} \operatorname{ess} f(s) = \lim_n \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} f^n(s) \mathrm{d}s \right)^{1/n}. \tag{37.2}$$

右端作为 t 的函数连续并且关于 n 递增. 从而左端为一个通常拓扑下的下半连续函数, 并且 $\overline{f}$ 为第二类 Baire 函数.

定理 设 (X_t) 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应的 Lebesgue 可测实值过程. 令 38

$$\overline{X}_t^+(\omega) = \lim \sup_{s \downarrow\downarrow t} \operatorname{ess} X_s(\omega), \quad \underline{X}_t^+(\omega) = \lim \inf_{s \downarrow\downarrow t} \operatorname{ess} X_s(\omega). \tag{38.1}$$

a) 过程 $(\overline{X}_t^+)$ 与一个 (通常意义下的) 可测过程不可区别, 并且它关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是循序的.

b) (X_t) 存在右连续几乎修正当且仅当 $(\overline{X}_t^+)$ 和 $(\underline{X}_t^+)$ 不可区别.

c) 当 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 完备时, 使得 $X.(\omega)$ 几乎处处等于一个右连续函数的 ω 组成的集合是可测的.

证 a) 由于过程 (X_t) 是 Lebesgue 可测的, 存在两个通常意义下的可测过程 (U_t) 和 (V_t), 满足 $U_t \leqslant X_t \leqslant V_t$, 并且 $\{(t,\omega) : U_t(\omega) < V_t(\omega)\}$ 在测度 $\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ 下为零测集. 由 Fubini 定理, 使得 $U.(\omega) = V.(\omega)$ 不几乎处处成立的 ω 组成的集合 A 是 $\mathbb{P}$-零集. 当 $\omega \notin A$ 时, 由定理 37.a), 对所有的 t, $\overline{U}_t^+(\omega) = \overline{X}_t^+(\omega) = \overline{V}_t^+(\omega)$. 从而我们只需证明, 比方说过程 $(\overline{U}_t^+)$, 关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是循序的. 为此, 我们将问题简化为 (U_t) 取值于区间 $[0,1]$ 的情形, 我们注意到过程

$$t \mapsto \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} U_s^n \mathrm{d}s \right)^{1/n}$$

的轨道是连续的, 并且它关于 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 是适应的: 从而它是一个 $(\mathcal{F}_{t+\varepsilon})$ 循序过程. 当 $n \to \infty$ 时, 我们得到, 过程 $t \mapsto \sup \operatorname{ess}_{t<s<t+\varepsilon} U_s$ 关于同样的 σ-代数流是循序的, 并且当 $\varepsilon \to 0$ 时, $(\overline{U}_t^+)$ 是一个 $(\mathcal{F}_{t+})$ 循序过程 (第 14 段).

b) 设 (X_t) 存在一个右连续的几乎修正 (Y_t). 由 Fubini 定理, 存在可测集 $N \subset \Omega$ 使得 $\mathbb{P}(N) = 0$, 并且当 $\omega \notin N$ 时, $X.(\omega) = Y.(\omega)$ 几乎处处成立. 于是当 $\omega \notin N$ 时, 我们有 $\overline{X}_t^+(\omega) = \overline{Y}_t^+(\omega) = Y_t(\omega) = \underline{Y}_t^+(\omega) = \underline{X}_t^+(\omega)$, 从而两个过程不可区别. 反之, 如果 $\overline{X}_\cdot^+(\omega) = \underline{X}_\cdot^+(\omega)$, 那么它们的共同轨道作为函数在右本质拓扑下既上半连续又下半连续, 从而它们是本质右连续的, 由定理 37.d) 我们知其右连续, 并且它与 $X.(\omega)$ 几乎处处相等 (定理 37.c)). 如果过程 $(\overline{X}_t^+)$ 和 $(\underline{X}_t^+)$ 不可区别, 那么存在可测集 N 使得 $\mathbb{P}(N) = 0$, 并且当 $\omega \notin N$ 时, $\underline{X}_\cdot^+(\omega) = \overline{X}_\cdot^+(\omega)$; 所求的几乎修正 (Y_t) 可以取为在 N^c 上与这些过程取值相同, 而在 N 上取值为 0. 我们必须注意到此时它并不循序可测; 如果我们将零测集 N 加到 $\mathcal{F}_0$ 上, 那么它就是循序可测的了.

c) 我们留给读者去验证, 与 b) 类似, c) 中的集合等于 $\{\omega : \overline{X}^+_\cdot(\omega) = \underline{X}^+_\cdot(\omega)\}$. 它的余集为 $\{(t,\omega) : \overline{X}^+_t(\omega) \neq \underline{X}^+_t(\omega)\}$ 的投影; 因为这一集合在相差一个不足道集的意义下与 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$ 中的某一元素相等, 所以它的投影是 $\mathcal{F}$-可测的 (第 III 章定理 13 和第 III 章第 33 段). □

39 **注** 利用这个投影的手段我们可以给出如下更精确的结果: 我们不再作完备性假设, 假设 (X_t) 可测, 则使得 $X_\cdot(\omega)$ 与一个右连续函数几乎处处相等的 $\omega \in \Omega$ 组成的集合为一个 $\mathcal{F}$-解析集的余集. 和定理 18 类比, 我们自然要问: 使得 $X_\cdot(\omega)$ 与一个右连左极映射几乎处处相等的 ω 组成的集合是否 $\mathcal{F}$-可测. 这是成立的, 我们将简略证明. 首先我们给出一个有趣的定义:

定义 *设 A 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的可测集. Ω 上的函数*

$$E_A(\omega) = \inf\left\{t : \int_0^t I_A(s,\omega)\mathrm{d}s > 0\right\} \qquad (\inf \varnothing = +\infty)$$

称为 A 的本质首达时.

本质首达时可以看成可测集

$$\left\{(t,\omega) : \int_0^t I_A(s,\omega)\mathrm{d}s > 0\right\}$$

在通常意义下的首达时.

引理 *可测集 A 的本质首达时是 $\mathcal{F}$-可测的.*

证 对所有的 $t \geqslant 0$, 如下等式成立

$$\{\omega : E_A(\omega) \geqslant t\} = \left\{\omega : \int_0^t I_A(s,\omega)\mathrm{d}s = 0\right\},$$

由此即得结论. □

这样前述性质的证明与定理 18 的证明就十分相似了; 我们只需用本质首达时代替时间 T^ϵ_n 即可.

伪轨道

40 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为概率空间, E 为可度量化可分的状态空间. 为避免问题无意义的复杂化, 本小节中我们始终假设 E 为 Lusin 空间. 我们将 E 作为可测 (但不是拓扑) 空间等同于区间 $[0,1]$ 中的一个 Borel 子集: 这使得我们可以借助实分析的工具. 我们始终假设 $0 \in E$, 但是 0 所起的作用可以被 E 中事先选定的任何一点所取代.

我们研究取值于 E 中的 Lebesgue 可测过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 按照在第 35 段中定义的几乎等价关系下的等价类. 特别的, 我们要对每个几乎等价类构造一个典则代表元.

首先我们给出一个注: 考虑定义在 Ω 上取值于 E 的 Lebesgue 可测过程 (X_t), 比如说一个取值于 I 中的过程. 由完备化理论, 我们知道存在一个通常意义下可测的过程 (Y_t), 使得集合 $\{(t,\omega):X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$ 在测度 $\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ 下为零测集. 当 $Y_t\notin E$ 时, 用 0 代替 Y_t, 我们可以假设 (Y_t) 取值于 E. 但这时由 Fubini 定理, (Y_t) 为 (X_t) 的一个几乎修正. 不失一般性, 从 "几乎等价" 类的角度看, 我们仅考虑通常意义下的可测过程.

定义 *设 f 是从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的一个 Borel 映射. Lebesgue 测度在映射 $t\mapsto(t,f(t))$ 下的像为一个 $\mathbb{R}_+\times E$ 上的测度, 我们称它为 f 的伪轨道, 记为 $\psi(f)$.* 41

设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为定义在 Ω 上取值于 E 的一个可测过程. Borel 映射 $X.(\omega)$ 对应的伪轨道称为 ω 的伪轨道, 记为 $\psi^X(\omega)$ 或 $\psi(\omega)$.

现在, 我们的目的是证明伪轨道组成的集合具有 Lusin 可测结构, 使得映射 ψ 可测.

定义 *我们记 $\mathcal{L}(E)$为 $\mathbb{R}_+\times E$ 上满足在 $\mathbb{R}_+$ 上的投影为 Lebesgue 测度的非负测度组成的集合, $\Pi(E)$ 为从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的所有 Borel 映射对应的伪轨道组成的集合. 在这些空间上加上使得所有的映射 $\lambda\mapsto\langle\lambda,f\otimes g\rangle$ 均连续的最粗的拓扑, 其中 f 为 $\mathbb{R}_+$ 上具有紧支集的连续函数, g 为 E 上的有界连续函数, 并且我们给定这些空间上相应的可测结构.* 42

我们很容易给出可测结构的刻画: 由单调类定理, 它也可以由映射 $\lambda\mapsto\langle\lambda,j\rangle$ 生成, 其中 j 为 $\mathbb{R}_+\times E$ 上的非负 Borel 函数. 因此它只依赖于 E 上的可测结构而与 E 上的拓扑选取无关. 下文中我们将不考虑拓扑结构 (可以将 E 作为拓扑子空间嵌入到一个紧度量空间中加以研究).

定理 *如果 E 为 Lusin 空间, 那么 $\Pi(E)$ 为 Lusin 可测空间.* 43

证 我们将 E 嵌入到 I 中. $\mathcal{L}(I)$ 为具有可数基的局部紧空间 $\mathbb{R}_+\times I$ 上的一些 Randon 测度组成的集合, 并且 $\mathcal{L}(I)$ 上的拓扑为淡收敛拓扑[①]. 另一方面, 每一个 $\mu\in\mathcal{L}(I)$ 在 $[0,n]\times I$ 上的测度值都为 n, 从而 $\mathcal{L}(I)$ 在淡收敛拓扑下有界. 因为它显然是闭的, 从而它为可度量化紧空间. 函数 $\mu\mapsto\mu(E^c)$ 为 $\mathcal{L}(I)$ 上的 Borel 函数, 因此集合 $\mathcal{L}(E)=\{\mu\in\mathcal{L}(I):\mu(E^c)=0\}$ 在 $\mathcal{L}(I)$ 中为 Borel 集. 另一方面, 我们有 $\Pi(E)=\Pi(I)\cap\mathcal{L}(E)$, 因为如果 f 为从 $\mathbb{R}_+$ 到 I 的 Borel 映射, 并且 $\mathbb{R}_+$ 上的 Lebesgue 测度 λ 在 $t\mapsto(t,f(t))$ 下的像支撑在 $\mathbb{R}_+\times E$ 上, 那么对几乎所有的 t, $f(t)\in E$, 并且存在从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的 Borel 映射给出同样的像测度. 因此我们只需证明 $\Pi(I)$ 为 $\mathcal{L}(I)$ 中的 Borel 集.

[①] Barbaki [4], Intégration, 第 III 章中详细研究了具有可数基的局部紧空间上的淡收敛拓扑.

为此, 由 Mokobodzki 的想法, 我们来证明 $\Pi(I)$ 为可度量化紧凸集 $\mathcal{L}(I)$ 的端点组成的集合. 我们将在第 XI 章[①]中看到上述凸集的端点组成的集合为 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 由此即可得到我们所需的结果.

设 μ 为 λ 在 $t \mapsto (t, f(t))$ 下的像, 其中 f 为取值于 I 的 Borel 函数. 假设 $\mu = c\mu_1 + (1-c)\mu_2$, 其中 $c \in (0,1)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{L}(I)$. 我们将 μ_1 和 μ_2 关于它们在 $\mathbb{R}_+$ 上的投影 λ 分解如下:

$$\mu_i(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \int \varepsilon_s(\mathrm{d}t) \otimes \alpha_s^i(\mathrm{d}x)\lambda(\mathrm{d}s) \qquad (i = 1, 2),$$

其中 (α_s^i) 为 I 上可测的一族概率测度. 则对几乎所有的 s, $c\alpha_s^1 + (1-c)\alpha_s^2 = \varepsilon_{f(s)}$, 因此 $\alpha_s^1 = \alpha_s^2 = \varepsilon_{f(s)}$, 最终, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; μ 为端点.

反之, 设 μ 为属于 $\mathcal{L}(I)$ 但是不属于 $\Pi(I)$ 的测度. 我们来证明它不是 $\mathcal{L}(I)$ 的端点. 如上所述, 记 $\mu = \int \varepsilon_s \otimes \alpha_s \lambda(\mathrm{d}s)$. 对所有的 s, 记 $g(s)$ 和 $h(s)$ 为 α_s 的支撑的下确界和上确界; 它们均为 s 的 Borel 函数 (例如, $g(s)$ 为使得 $\alpha_s([0,r)) > 0$ 的有理数 r 的下确界), 并且由 $\mu \notin \Pi(I)$, 我们可以推出 $\{s : g(s) < h(s)\}$ 不是零测集. 记 $j = \dfrac{g+h}{2}$, 则对 $c \in (0,1)$,

$$m_s(\mathrm{d}x) = \begin{cases} \alpha_s(\mathrm{d}x) I_{[0,j(s))}(x) / \|\alpha_s I_{[0,j(s))}\|, & \text{当 } \alpha_s(I_{[0,j(s))}) > c \text{ 时}, \\ \alpha_s(\mathrm{d}x), & \text{其他情形}. \end{cases}$$

测度 $\mu' = \int \varepsilon_s \otimes m_s \lambda(\mathrm{d}s)$ 属于 $\mathcal{L}(I)$, 并且 $cm_s \leqslant \alpha_s$. 从而测度 $\mu'' = \mu - c\mu'/(1-c)$ 非负. 因为 μ'' 在 $\mathbb{R}_+$ 上的投影是 Lebesgue 测度, 所以我们有 $\mu'' \in \mathcal{L}(I)$, 并且 $\mu = c\mu' + (1-c)\mu''$. 注意到当 $g(s) < h(s)$ 时, α_s 在区间 $[0, j(s))$ 和 $[j(s), 1]$ 上均不为零, 因此当 c 充分小时, $m_s \neq \alpha_s$. 这样当 $c = 1/n$ 并且 n 充分大时, $\alpha = c\mu' + (1-c)\mu''$ 非平凡且 μ 不为端点. □

注　a) 上述的证明可以应用于 E 嵌入到 I 的情形 (来代替 I), 我们能够证明, $\Pi(E)$ 为凸 (未必紧) 集 $\mathcal{L}(E)$ 的端点组成的集合.

假设 E 为波兰空间, 我们将它作为 $\mathcal{G}_\delta$ 集嵌入到某个可度量化紧空间 K 中: $\mathcal{L}(E)$ 上的拓扑可以由 $\mathcal{L}(K)$ 上的拓扑诱导, 并且 $\mathcal{L}(E)$ 为 $\mathcal{L}(K)$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集 (参见第 III 章第 60 段). 另一方面, 由上面的注, $\Pi(K)$ 也是 $\mathcal{L}(K)$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 从而 $\mathcal{L}(E) \cap \Pi(K) = \Pi(E)$ 亦为 $\Pi(K)$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 因此它为波兰空间.

b) 存在 $\Pi(E)$ 上的强于定义 42 的拓扑, 它们诱导出相同的 Borel 结构. 设 d 为定义了 E 上拓扑的有界距离, μ 和 μ' 为 $\Pi(E)$ 中的两个元素, 它们分别为 $\mathbb{R}_+$ 上的 Lebeguse 测度在两个映射 $t \mapsto (t, f(t)), t \mapsto (t, f'(t))$ 下的像, 于是我们定义 $\Pi(E)$ 上的距离 $\overline{d}$:

$$\overline{d}(\mu, \mu') = \int_0^\infty d(f(t), f'(t)) e^{-t} \mathrm{d}t. \tag{43.1}$$

[①]第一版中的第 XI 章第 24 段.

这等于说将 $\Pi(E)$ 视为从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的可测映射的集合, 带有依测度收敛拓扑. $\Pi(E)$ 在此度量下可分, 这是因为 $\Pi(E)$ 中的任何一个元素都可以先由连续函数依测度逼近, 然后用取值于可数稠密集的阶梯函数依测度逼近. 我们容易看出 $\Pi(E)$ 上的拓扑和依概率收敛的拓扑有同样的 Borel σ-代数. 然而, $\Pi(E)$ 上的前一个拓扑在某些方面更适用 (当 E 为波兰空间时, $\Pi(E)$ 在依测度收敛拓扑下未必为波兰空间).

现在我们考虑定义在 Ω 上取值于 E 的可测过程 (X_t). 如果 φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上具有紧支撑的连续函数, g 为 E 上的有界连续函数, 那么显然函数 $\omega \mapsto \int g \circ X_s(\omega)\varphi(s)\mathrm{d}s = \langle \psi^X(\omega), \varphi \otimes g \rangle$ 在 Ω 上可测. 换句话说, 从 Ω 到 $\Pi(E)$ 的映射 ψ 可测. 我们可以考虑 $\mathbb{P}$ 在 ψ 下的像测度.

定义 设 (X_t) 为定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上取值于可度量化 Lusin 空间 E 中的可测过程; 我们称 $\mathbb{P}$ 在从 Ω 到 $\Pi(E)$ 的映射 ψ 下的像测度为 (X_t) 的伪测度. 44

注 设集合 Ω 为从 $\mathbb{R}_+$ 到 E 的右连续 (相应的, 右连左极) 映射的全体, 其上的 σ-代数由坐标映射生成. 将 $\omega \in \Omega$ 映为相应的伪轨道 $\psi(\omega)$ 的映射为单射: 从而我们可以将 Ω 看成 $\Pi(E)$ 中的一个子集. 我们已知 ψ 可测. 另一方面, 如果 $\omega \in \Omega$ 并且 f 为 E 上的有界连续函数, 那么我们有 $f(\omega(t)) = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\int_0^h f(\omega(t+s))\mathrm{d}s$, 从而 Ω 上的坐标映射关于 $\Pi(E)$ 诱导出的 σ-代数可测, 因此 ψ 为 Borel 同构. 前面的结果 (注 19.a)) 表明 Ω 关于它的通常可测结构是一个余 Souslin 空间 (相应的, 当 E 为波兰空间时, Ω 为 Lusin 空间), 在这里这个结果能证明 Ω 是 $\Pi(E)$ 中的一个解析集 (相应的, Borel 集)的余集.

我们将说明, 借助伪测度的概念, 几乎等价问题可以令人满意地解决.

定理 设 (X_t) 和 (Y_t) 为取值于同一个 Lusin 空间 E 的两个可测过程 (它们可以定义在不同的概率空间上). 则下列性质等价: 45

a) (X_t) 和 (Y_t) 具有相同的伪测度分布 $\mathbb{Q}$.

b) (X_t) 和 (Y_t) 几乎等价 (第 35 段).

c) 存在 $\mathbb{R}_+$ 中 Borel 子集 $\mathbb{T}$, 它的余集为 Lebesgue 零测集, 使得过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 和 $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 具有相同的时间分布.

进一步, 存在定义在 $\Pi(E)$ 上 (就此确定) 的可测随机过程 $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, 满足如下性质:

对 $\Pi(E)$ 上的任意概率测度 $\mathbb{J}$, 过程 (Z_t) 在 $\mathbb{J}$ 下的伪测度为 $\mathbb{J}$ 本身.

特别的, 当 $\mathbb{J} = \mathbb{Q}$ 时, (Z_t) 属于 (X_t) 的伪等价类.

证 我们在前面已经讨论过, 如果 g 为 E 上的非负 Borel 函数, φ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的非负 Borel 函数, 那么

$$\int g(X_t(\omega))\varphi(t)\mathrm{d}t = \langle \psi^X(\omega), \varphi \otimes g \rangle.$$

我们即得 a) ⇔ b). 为证明 a) ⇒ c), 我们再次将 E 嵌入到 $I=[0,1]$ 中, 并且设 $0\in E$. 由 Lebesgue 微分定理, 记 j 为 E 到 $[0,1]$ 上的恒等映射, 下式几乎处处成立:

$$X_t(\omega)=\lim_n n\int_t^{t+1/n}X_s(\omega)\mathrm{d}t=\lim_n\langle\psi^X(\omega),e_n(t+.)\otimes j\rangle, \tag{45.1}$$

其中 $e_n(s)=nI_{[0,1/n]}(s)$. 对每个测度 $\mu\in\Pi(E)$, 我们记

$$Z_t(\mu)=\begin{cases}\liminf\limits_n\langle\mu,e_n(t+.)\otimes j\rangle, & \text{如果这一数值属于 } E,\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases} \tag{45.2}$$

显然, $\Pi(E)$ 上的过程 (Z_t) 可测. 另一方面, 由 (45.1),

$$\text{对所有的 }\omega,\quad Z.(\psi^X(\omega))=X.(\omega)\quad \text{p.p.}$$

从而由 Fubini 定理, 使得 “$X_t=Z_t\circ\psi^X$ p.s.” 不成立的 t 组成的集合为零测集. 记 $\mathbb{T}$ 为使得 $X_t=Z_t\circ\psi^X$ 且 $Y_t=Z_t\circ\psi^Y$ 都几乎必然成立的 t 组成的集合. 由像测度的定义, 过程 $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (相应的, $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$) 的时间分布为过程 $(Z_t)_{t\in\mathbb{T}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 下的分布. 从而由 a) 可以推出 c).

现在我们证明 c) ⇒ b). 当 $t\notin\mathbb{T}$ 时, 用 0 代替 X_t 和 Y_t, 我们可以假设这两个过程在整个 $\mathbb{R}_+$ 上具有相同的时间分布. 然后, 我们只需证明定理在有限区间 $[0,A)$ 上成立, 这使得我们可以将问题简化成 (X_t) 和 (Y_t) 均为 $\mathbb{R}$ 上周期为 A 的周期过程的情形. 在下面的讨论中, 我们取 $A=1$.

我们参考 Doob 的方法, 细节请读者参阅 Stochastic Process, 第 63 页. 设 g 为 E 上的有界 Borel 函数, φ 为 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的有界 Borel 函数. 对 (X_t) 的定义域 Ω 中的每一个 ω, 我们想要计算积分

$$M^X(\omega)=M_\varphi^X(\omega,g)=\int_0^1 g(X_t(\omega))\varphi(t)\mathrm{d}t. \tag{45.3}$$

为此, 将其与如下的 Riemann 和相比较,

$$R_i^X(\sigma,\omega,\varphi,g)=R_i^X(\sigma,\omega)=2^{-i}\sum_{k<2^i}g(X_{\sigma+k2^{-i}}(\omega))\varphi(\sigma+k2^{-i}),$$

其中 σ 为属于 $[0,1)$ 的参数.

由实分析中的一个简单结果, 我们有, 对所有的 ω,

$$\int|M^X(\omega)-R_i^X(\sigma,\omega)|\mathrm{d}\sigma\xrightarrow[i\to\infty]{}0.$$

对 ω 积分, 我们得到它关于测度 $\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\otimes\mathrm{d}\sigma$ 是 L^1 收敛的. 取序列 (i_n) 使得

$$\text{关于 }\sigma,\omega,\quad R_{i_n}^X(\sigma,\omega)\to M^X(\omega)\quad\text{p.s.}$$

那么由 Fubini 定理, 存在零测集 N, 使得当 $\sigma \notin N$ 时,

$$(45.4) \qquad \text{关于 } \omega,\ R^X_{i_n}(\sigma,\omega) \to M^X(\omega) \quad \text{p.s.}$$

因为这些 Riemann 和是一致有界的, 事实上, 它们在任意的 $L^p(p<\infty)$ 中均收敛. 必要时, 我们取 (i_n) 的子列, 并且扩大零测集 N, 我们仍有, 在 (Y_t) 的定义域 Ω' 上

$$(45.5) \qquad \text{关于 } \omega',\ R^Y_{i_n}(\sigma,\omega') \to M^Y(\omega') \quad \text{p.s.}$$

这仅涉及给定的一对 (φ,g). 但是通过选取子列以及逐步扩大集合 N, 我们得到对任意有限对这样的 (φ_i,g_i), (45.3) 和 (45.4) 均成立. 这使得我们可以用仅依赖于时间分布的量来计算随机向量

$$(M^Y_{\varphi_1}(\cdot,g_1),\cdots,M^Y_{\varphi_n}(\cdot,g_n)),\quad (M^X_{\varphi_1}(\cdot,g_1),\cdots,M^X_{\varphi_n}(\cdot,g_n))$$

的分布. 因此对两个过程而言它们相等. 从而它们几乎等价.

定理的最后一部分的证明我们留给读者: 此时并不需要再证明任何东西, 只需对证明开头的 (Z_t) 做稍有不同的描述即可. □

注[①] 在第 5 段中我们提到过程的时间分布一般不是精确的概念. 它仅给出依赖于可数个时刻的事件的信息. 这个说法对于一类重要的特殊情形需要加以修正: 如果两个可测过程 (X_t) 和 (Y_t) 具有相同的时间分布, 那么由定理 45, 它们的伪测度分布也相同. 我们还能更进一步: 定义 35 说明如果 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为在 Lebesgue 测度下 46

①译校者注: 关于注 46, 英文版和法文版有很大的不同, 英文版表述如下:

在第 5 段中我们提到过程的时间分布一般说来并不是一个精确的概念, 因为它仅给出依赖于有限个时刻的事件的信息. 对于可测过程这个说法在定理 45 中得到修正: 两个具有同样时间分布的过程具有同样的伪测度分布, 这使我们可以对样本函数作很多分析. 现在再进一步. 设 $g_1,\cdots,g_n$ 为 (X_t) 的状态空间 E 上的有界 Borel 函数, $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的有限测度 (不一定要像定理 45 中那样对于 Lebesgue 测度绝对连续). 我们来证明时间分布完全决定随机向量

$$U=\left(\int g_1\circ X_s\mu_1(\mathrm{d}s),\cdots,\int g_n\circ X_s\mu_n(\mathrm{d}s)\right)$$

的分布. 因为 U 取值于 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界子集中, 我们只要证明, 对于任意多项式 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 我们可以计算 $\mathbb{E}[f(U)]$.

这可以简化为单项式的情形, 最终化为讨论

$$\mathbb{E}\left[\left(\int h_1\circ X_s\lambda_1(\mathrm{d}s)\right)\cdots\left(\int h_k\circ X_s\lambda_k(\mathrm{d}s)\right)\right],$$

其中 k 可能比 n 大, 因为单项式中会包含坐标函数的幂次. 由 Fubini 定理, 上式即为

$$\int_{\mathbb{R}^k}\lambda_1(\mathrm{d}s_1)\cdots\lambda_k(\mathrm{d}s_k)\mathbb{E}[h_1\circ X_{s_1}\cdots h_k\circ X_{s_k}],$$

而这个表达式的值就仅依赖于 (X_t) 的时间分布. 这个比原来简单得多的证明是 T.Kurtz 教授告诉我们的.

绝对连续的有限非负测度, $g_1, \cdots, g_n$ 为 (X_t) 和 (Y_t) 的状态空间 E 上的有界 Borel 函数, 那么随机向量

$$
\begin{aligned}
&\left(\int g_1 \circ X_s \mu_1(\mathrm{d}s), \cdots, \int g_n \circ X_s \mu_n(\mathrm{d}s)\right), \\
&\left(\int g_1 \circ Y_s \mu_1(\mathrm{d}s), \cdots, \int g_n \circ Y_s \mu_n(\mathrm{d}s)\right)
\end{aligned} \tag{46.1}
$$

同分布. 这对于关于 Lebesgue 测度不绝对连续的 μ_i 也成立. 我们不给出证明的细节, 但是给出这一推广的非常简单的基本原理: 设 μ_i 关于一个非负测度 μ 绝对连续, $a(t) = \mu([0,t])$ 为其分布函数. 必要时对 μ 做提升 (即在 μ 上加上 Lebesgue 测度), 我们可以假设 a 严格递增, $\lim_{t\to\infty} a(t) = +\infty$. 设

$$c(t) = \inf\{s : a(s) > t\},$$

这是一个连续增函数. 我们有, 对 $\mathbb{R}_+$ 上的任意非负函数 f,

$$\int f(s)\mu(\mathrm{d}s) = \int f(c_s)\mathrm{d}s.$$

设 φ_i 为 μ_i 关于 μ 的密度, 我们有

$$\int g_i \circ X_s \mu_i(\mathrm{d}s) = \int g_i \circ X_{c_s} \varphi_i \circ c_s \mathrm{d}s.$$

对 Y 也有类似的等式成立.

这样可以看出, 为验证 (46.1) 在 μ_i 下同分布, 我们只需验证过程 (X_{c_t}) 和 (Y_{c_t}) 的时间分布相同.

§3 可选时与可料时

本节中, 我们给出 "过程的一般理论" 的基本概念, 至少是那些并不需要借助鞅论知识的内容. 此处读者切不可望文生义, 因为该理论主要研究的并不是过程, 而是研究可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 或概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上由 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 决定的结构.

这一理论有两种略微不同的形式. 一种是概率性的理论, 涉及一个给定的概率测度 $\mathbb{P}$, 该理论建立在后面被称为通常条件的假设之上. 另一方面, 非概率性理论 (只依赖于空间而不依赖于任何测度) 的重要性在最近的研究中显现出来, 但是该理论还不是很完善. 我们建议读者在初次阅读时忽略那些因为没有假设通常条件而引起的困难.

47 读者可以参考第 11—15 段中给出的 σ-代数流的定义. 为方便起见, 当我们提及 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 时, 我们总是假设给定了两个附加的 σ-代数: 一个记为 $\mathcal{F}_\infty$, 它包含

所有 $\mathcal{F}_t$, 另一个记为 $\mathcal{F}_{0-}$, 它包含在 $\mathcal{F}_0$ 中. 方便起见, 当 $t<0$ 时, 我们记 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{0-}$; $\mathcal{F}_{\infty-}=\bigvee_t \mathcal{F}_t$.

这些假设十分方便且不失一般性: 如果上述两个 σ-代数并未明确给出, 我们取 $\mathcal{F}_{0-}=\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_\infty=\mathcal{F}_{\infty-}$ (或 $\mathcal{F}_\infty=\mathcal{F}$).

定义 设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 为带有 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 的概率空间. 48

如果概率空间完备并且所有的 $\mathbb{P}$-零集均属于 $\mathcal{F}_{0-}$, 那么我们称该 σ-代数流完备.

如果 σ-代数流完备且右连续 (即对于所有的 $t\geqslant 0$, 有 $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t+}$), 那么我们称其满足通常条件.

任意 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 总可以如下完备化: 先将空间完备化, 再在每个 σ-代数上加上所有零集. 如果对右连续的 σ-代数流 $\mathcal{G}_t^\circ=\mathcal{F}_{t+}^\circ(\mathcal{G}_{0-}^\circ=\mathcal{F}_{0-}^\circ)$ 进行上述操作, 那么我们得到一个满足通常条件的 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$, 称之为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的通常化提升. 关于符号我们将尽可能地使用同一原则: 上标 "°" 表示未必满足通常条件的 σ-代数流, 不带 "°" 的 σ-代数流表示已经通常化提升后的 σ-代数流.

因为要将所有的零集加入到 $\mathcal{F}_{0-}^\circ$ 中, 而不是仅将每个 $\mathcal{F}_t^\circ$ 中的零集加入到 $\mathcal{F}_t^\circ$ 中, 所以完备化过程将对 σ-代数流的结构带来很强的影响. 例如, 在 Markov 过程理论中, 直接对 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 完备化便可使得 σ-代数流右连续, 而无需考虑 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$.

停时

微积分的创造者们在把导数这个如此简单的概念明确化这件事情上所付出的心血与才智, 大概和后人们完成微积分的其他所有内容的付出是差不多的. Doob 发明停时这个概念完全可以与之媲美.

定义 设 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 为 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的 σ-代数流, 如果 Ω 上取值于 $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ 的随机变量 T 满足 49

(49.1) 对所有的 $t\in\mathbb{R}_+$, 事件 $\{T\leqslant t\}$ 属于 $\mathcal{F}_t^\circ$,

那么称 T 为 (关于 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的) 停时, 或 (关于 $(\mathcal{F}_t^\circ)$) 可选.

任意非负常数显然都是停时. 停时一词已经使用了很长时间, 而后来出现可选一词自有它的好处 (至少它是个形容词), 我们略微偏好后者一些.

注 a) 如果随机变量 T 满足条件

(49.2) 对所有的 t, $\{T<t\}\in\mathcal{F}_t^\circ$,

通常我们称 T 为宽 (广义) 停时. 但这并不是真正意义上的新概念: T 为宽停时当且仅当 T 为 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时. 当 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 右连续时, 停时可以由 (49.2) 来刻画, 这比

验证 (49.1) 容易得多. 宽停时的另一刻画为

(49.3) 对所有的 $t, T \wedge t$ 是 $\mathcal{F}_t^\circ$-可测的.

b) 在离散情形, 即离散 σ-代数流 $(\mathcal{F}_n^\circ)$ 的情形, 停时可以由下面两个等价性质中的任何一个来刻画:

(49.4) 对所有的 $n, \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n^\circ$.

(49.5) 对所有的 $n, \{T = n\} \in \mathcal{F}_n^\circ$.

一般的, 对于连续情形, 停时并没有类似 (49.5) 的刻画. 但是在注 102 中, 读者将会看到 "典则过程" 的情形.

一个基本的例子

所有发生在时刻 t 之前的事件全体构成了 σ-代数 $\mathcal{F}_t^\circ$ (第 13 段), 换句话说这就是时刻 t 时在观测者的世界中的所有已知信息. 设想我们观察某一随机现象是否发生, 该现象首次发生的 (随机) 时刻为 $T(\omega)$. 事件 $\{T \leqslant t\}$ 意味着在时刻 t 之前该现象至少发生一次, 从而它属于 $(\mathcal{F}_t^\circ)$, T 就是一个停时.

下面的定理为上面文字描述的数学刻画: 证明过程要比定理本身更丰富.

50 **定理** 假设 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件, A 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的循序子集 (第 31 段), 则 A 的首达时 D_A (第 III 章第 44 段) 为停时.

证 首先我们详细讨论 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 不满足通常条件的情形. 集合 $\{D_A < t\}$ 为集合 $\{(s, \omega) : s < t, (s, \omega) \in A\}$ 在 Ω 上的投影. 由循序集的定义 (第 14 段), 后者属于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}_t^\circ$. 于是 (参见第 III 章第 44 段)

(50.1) 对所有的 $t, \{D_A < t\}$ 为 $\mathcal{F}_t^\circ$-解析集.

在定理的假设下, σ-代数 $\mathcal{F}_t$ 完备, 从而它等于 $\mathcal{A}(\mathcal{F}_t)$ (第 III 章第 33 段). 由 (49.1) 可以推出 D_A 为 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时, 而由右连续性我们知道 $(\mathcal{F}_{t+})$ 等于 $(\mathcal{F}_t)$. □

51 **注** a) 在通常条件下, 在 $\mathbb{P}$ 下与某个停时几乎必然相等的任意随机变量仍为停时. 这一定理可以应用于与某个循序集不可区别的任意集合 A.

b) 对任意的 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$, 每个停时 T 可以表示为集合 $\{(t, \omega) : t \geqslant T(\omega)\}$ 的首达时, 其示性过程为右连续适应过程, 从而它为循序过程 (第 15 段). 同样的, 每个宽停时 T 为循序集 $\{(t, \omega) : t > T(\omega)\}$ 的首达时 (关于这些集合, 参见第 60 段).

c) 我们回到证明. 假设 A 为右闭集, 则 $\{D_A \leqslant t\}$ 为集合 $\{(s, \omega) : s \leqslant t, (s, \omega) \in A\}$ 的投影, 对应于 (50.1), 我们有

(50.2) 对所有的 $t, \{D_A \leqslant t\}$ 为 $\mathcal{F}_t^\circ$-解析集.

停时对应的 σ-代数

52

定义 设 T 为 Ω 上的 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, $\mathcal{F}_\infty^\circ$ 中满足

(52.1) $$\text{对所有的 } t, A\cap\{T\leqslant t\} \text{ 属于 } \mathcal{F}_t^\circ$$

的事件 A 组成的 σ-代数称为 T 前 σ-代数, 记为 $\mathcal{F}_T^\circ$.

当 T 为非负常数 r 时, $\mathcal{F}_T^\circ$ 即为 σ-代数 $\mathcal{F}_r^\circ$, 从而这些符号和名称都是合理的. 我们并不试图给出 (52.1) 的直观解释, 这样做的理由以后必然会知道.

对所有的 t, 我们记 $\mathcal{G}_t^\circ=\mathcal{F}_{t+}^\circ$ ($\mathcal{G}_{0-}^\circ=\mathcal{F}_{0-}^\circ, \mathcal{G}_\infty^\circ=\mathcal{F}_\infty^\circ$). 设 T 为 $(\mathcal{G}_t^\circ)$ 停时, 即它是一个 $(\mathcal{F}_t^\circ)$"宽停时"(第 49 段), 则事件 A 属于 $\mathcal{G}_T^\circ$ 当且仅当它属于 $\mathcal{G}_\infty^\circ=\mathcal{F}_\infty^\circ$ 并且

(52.2) $$\text{对所有的 } t, A\cap\{T<t\} \text{ 属于 } \mathcal{F}_t^\circ.$$

我们自然地将这个 σ-代数 $\mathcal{G}_T^\circ$ 记为 $\mathcal{F}_{T+}^\circ$.

53

如下的性质只是定义 52 的重述而已. 不过在这里我们引入一个关于停时的运算和一个以后会经常用到的记号.

定理 设 T 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, 则 A 属于 $\mathcal{F}_T^\circ$ 当且仅当 A 属于 $\mathcal{F}_\infty^\circ$ 并且如下定义的随机变量 T_A 为停时①:

(53.1) $$T_A(\omega)=\begin{cases}T(\omega), & \text{当 } \omega\in A \text{ 时},\\ +\infty, & \text{当 } \omega\notin A \text{ 时}.\end{cases}$$

对于每个停时, 现在我们想要定义一个 σ-代数 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$. 我们会试图按照第 52 段中所述考虑 σ-代数流 $\mathcal{H}_t^\circ=\mathcal{F}_{t-}^\circ$, 并对每个停时 T, 定义 $\mathcal{F}_{T-}^\circ=\mathcal{H}_T^\circ$. 这一定义并不合适: 我们经常会遇到 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件, 且对所有的 t, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t-}$ 的情况. 从而对任意停时 T, 这一定义将导致 $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_{T-}$, 而在实际中, 对某些停时而言, "过去" 和 "严格过去" 的区别十分重要.

下面的定义由钟开莱和 Doob 给出:

54

定义 设 T 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, 由 $\mathcal{F}_{0-}^\circ$ 和形如

(54.1) $$A\cap\{t<T\}, t\geqslant 0, A\in\mathcal{F}_t^\circ$$

的事件生成的 σ-代数称为严格 T 前 σ-代数, 记为 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$.

读者可以验证, $\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 也可以由如下 (用起来稍许麻烦一些的) 集合生成:

(54.2) $$A\cap\{t\leqslant T\}, A\in\mathcal{F}_{t-}^\circ, t\geqslant 0.$$

这一定义对任意随机变量 $T\geqslant 0$ 都有意义 (参见 (68.1)). 如果对所有的 t, 我们记 $\mathcal{G}_t^\circ=\mathcal{F}_{t+}^\circ, \mathcal{G}_{0-}^\circ=\mathcal{F}_{0-}^\circ$, 那么对所有的 T, 我们有 $\mathcal{G}_{T-}^\circ=\mathcal{F}_{T-}^\circ$.

① 我们有时称 T_A 为 T 约化到 A 的停时, 但是这一术语并未广泛使用, 所以我们不愿使用它.

停时的初等性质

以后的叙述中，如果我们不加说明，随机变量均定义在同一个空间 $(\Omega, \mathcal{F}^\circ, \mathbb{P})$ 上并且停时对应于同一个 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$.

55 **定理** (封闭性质)

a) 设 S 和 T 为两个停时，则 $S \wedge T$ 和 $S \vee T$ 均为停时.

b) 设 (S_n) 为递增停时列，则 $S = \lim_n S_n$ 为停时.

c) 设 (S_n) 为递减停时列，则 $S = \lim_n S_n$ 为 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时. 如果停时列平稳，即对所有的 ω，存在一个整数 n，使得对所有的 $m \geqslant n$，有 $S_m(\omega) = S_n(\omega)$，那么 S 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时.

证 a) $\{S \wedge T \leqslant t\} = \{S \leqslant t\} \cup \{T \leqslant t\}$ 属于 $\mathcal{F}_t^\circ$. 对 $\vee$ 同理可证.

b) $\{S \leqslant t\} = \cap_n \{S_n \leqslant t\}$ 属于 $\mathcal{F}_t^\circ$.

c) $\{S < t\} = \cup_n \{S_n < t\}$ 属于 $\mathcal{F}_t^\circ$. 当停时列平稳时，$\{S \leqslant t\} = \cup_n \{S_n \leqslant t\}$. □

我们立即得到下面的结论：停时组成的集合对于运算 $(\vee d)$ 封闭. $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时 (宽停时) 组成的集合对于运算 $(\vee d, \wedge d)$ 封闭，从而对于可数的 $\liminf$ 和 $\limsup$ 封闭.

56 **定理** (停时前的事件)

a) 对每个停时 S，我们有 $\mathcal{F}_{S-}^\circ \subset \mathcal{F}_S^\circ$，并且 S 是 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$-可测的.

b) 设 S 和 T 为两个停时，且 $S \leqslant T$，则 $\mathcal{F}_S^\circ \subset \mathcal{F}_T^\circ$, $\mathcal{F}_{S-}^\circ \subset \mathcal{F}_{T-}^\circ$. 若 $S < T$ 处处成立，则 $\mathcal{F}_S^\circ \subset \mathcal{F}_{T-}^\circ$.

c) 设 S 和 T 为两个停时，则

(56.1) $$\text{对所有的 } A \in \mathcal{F}_S^\circ, A \cap \{S \leqslant T\} \text{ 属于 } \mathcal{F}_T^\circ.$$

(56.2) $$\text{对所有的 } A \in \mathcal{F}_S^\circ, A \cap \{S < T\} \text{ 属于 } \mathcal{F}_{T-}^\circ.$$

特别的，

(56.3) $$\{S \leqslant T\} \text{ 和 } \{S = T\} \text{ 均属于 } \mathcal{F}_S^\circ \text{ 和 } \mathcal{F}_T^\circ;\ \{S < T\} \text{ 属于 } \mathcal{F}_S^\circ \text{ 和 } \mathcal{F}_{T-}^\circ.$$

d) 设 (S_n) 为递增 (相应的，递减) 停时列，$S = \lim_n S_n$，则 $\mathcal{F}_{S-}^\circ = \bigvee_n \mathcal{F}_{S_n-}^\circ$ (相应的，$\mathcal{F}_{S+}^\circ = \cap_n \mathcal{F}_{S_n+}^\circ$).

e) 设 S 为停时，$A \subset \Omega$. 若 $A \in \mathcal{F}_{\infty-}^\circ$ (相应的，$A \in \mathcal{F}_\infty^\circ$)，则集合 $A \cap \{S = \infty\}$ 属于 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$ (相应的，$\mathcal{F}_S^\circ$).

证 a) 我们必须证明，$\mathcal{F}_{S-}^\circ$ 的每个生成元 B 都属于 $\mathcal{F}_S^\circ$，即对所有的 t，B 满足 $B \cap \{S \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^\circ$. 因为 $B \in \mathcal{F}_{0-}^\circ$ 或者 $B = A \cap \{r < S\}, r \geqslant 0, A \in \mathcal{F}_r^\circ$，无论是哪种情形，我们都可以很容易地验证结论成立.

对于 a) 的第二部分，我们只需注意到对任意的 t，$\{S > t\}$ 都是 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$ 的生成元 (54.1) 即可.

c) 性质 (56.1) 可以由下面的等式得到. 对所有的 t:

$$A\cap\{S\leqslant T\}\cap\{T\leqslant t\}=(A\cap\{S\leqslant t\})\cap\{T\leqslant t\}\cap\{S\wedge t\leqslant T\wedge t\}.$$

当 A 为 $\mathcal{F}_S^\circ$-可测时, 上式右端的三项均属于 $\mathcal{F}_t^\circ$. 性质 (56.2) 可以由下式得出:

$$A\cap\{S<T\}=\bigcup_r(A\cap\{S<r\})\cap\{r<T\},$$

其中 r 取遍所有有理数. 当 A 属于 $\mathcal{F}_S^\circ$ 时, 上式右端所涉及的事件均属于 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 的生成元 (54.1).

b) 当 $S\leqslant T$ 且 $A\in\mathcal{F}_S^\circ$ 时, 我们有 $A=A\cap\{S\leqslant T\}\in\mathcal{F}_T^\circ$; 当 $S<T$ 处处成立时, $A=A\cap\{S<T\}$ 属于 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$. 最后, 我们只需验证当 $S\leqslant T$ 时, $\mathcal{F}_{S-}^\circ$ 的生成元 (54.1) 属于 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$; 而如果 $B\in\mathcal{F}_t^\circ$, 那么

$$B\cap\{t<S\}=(B\cap\{t<S\})\cap\{t<T\}\quad 且\quad B\cap\{t<S\}\in\mathcal{F}_t^\circ.$$

d) 对于递增序列的情形, 由 b) 可知 $\vee_n\mathcal{F}_{S_n-}^\circ\subset\mathcal{F}_{S-}^\circ$. 另一方面, σ-代数 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$ 的任意生成元 (54.1) 都可以写成 $A\cap\{t<S\}=\cup_nA\cap\{t<S_n\}$, 其中 $t\geqslant 0, A\in\mathcal{F}_t^\circ$. 我们看到它属于 $\vee_n\mathcal{F}_{S_n-}^\circ$. 对于递减序列的情形, 回顾一下, $\mathcal{F}_{S+}^\circ$ 为满足对所有的 t, $A\cap\{S<t\}\in\mathcal{F}_t^\circ$ 的 $A\in\mathcal{F}_\infty^\circ$ 组成的集合. 由于 $A\cap\{S<t\}=\cap_nA\cap\{S_n<t\}$, 我们得到 $\mathcal{F}_{S+}^\circ\supset\cap_n\mathcal{F}_{S_n+}^\circ$. 相反的包含关系由 b) 可得.

e) 满足 $A\cap\{S=\infty\}$ 属于 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$ 的 $A\in\mathcal{F}_{\infty-}^\circ$ 组成的集合为一个 σ-代数. 从而我们只需验证对所有的 t, 这个 σ-代数包含 $\mathcal{F}_t^\circ$. 而如果 A 属于 $\mathcal{F}_t^\circ$, 那么对所有的 $n\geqslant t$, $A\cap\{n<T\}$ 为 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$ 的生成元 (54.1), 从而 $A\cap\{S=\infty\}$ 属于 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$. 最后, $\mathcal{F}_S^\circ$ 的情形是平凡的. □

注[①] a) 读者应该可以开始理解这一理论的一个重要原则: 将我们已知的关于常数时 t 和 σ-代数 $\mathcal{F}_t^\circ$ 的性质推广到停时 T 和 σ-代数 $\mathcal{F}_T^\circ$ 的情形, 从而 a) 和 b) 将 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的单调性推广到停时的情形. c) 将性质 (52.2) 和 (54.1) 由包含一个停时和一个常数的情形推广到包含两个停时的情形. d) 将 σ-代数流 $(\mathcal{F}_{t-}^\circ)$ 和 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 的连续性质推广到停时的情形.

b) 对所有的 $A\in\mathcal{F}_{S-}^\circ$, 一般我们未必有 $A\cap\{S\leqslant T\}$ 属于 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 成立. 我们将在定理 73.b) 中看到 (56.1) 恰当的推广.

①译校者注:英文版中此段还有一条注释:

c) 设 S 和 T 是两个停时, 则我们有

$$\mathcal{F}_{S\wedge T}=\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T,\quad \mathcal{F}_{S\vee T}=\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T.$$

事实上, 如果 A 同时属于 $\mathcal{F}_S$ 和 $\mathcal{F}_T$, 那么由 (56.1) 可知 $A\cap\{S\leqslant S\wedge T\}$ 和 $A\cap\{T\leqslant S\wedge T\}$ 属于 $\mathcal{F}_{S\wedge T}$; 取这两个集合之并可知 A 属于 $\mathcal{F}_{S\wedge T}$, 所以 $\mathcal{F}_S\cap\mathcal{F}_T\subset\mathcal{F}_{S\wedge T}$. 反向的包含关系是显然的. 类似的, 如果 A 属于 $\mathcal{F}_{S\vee T}$, 那么 $A\cap\{S\vee T\leqslant S\}$ 和 $A\cap\{S\vee T\leqslant T\}$ 都属于 $\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T$; 取它们的并集即得 A 属于 $\mathcal{F}_S\vee\mathcal{F}_T$. 读者可以证明 $\mathcal{F}_{(S\vee T)-}=\mathcal{F}_{S-}\vee\mathcal{F}_{T-}$, 以及如果 S 和 T 都是可料时, 那么 $\mathcal{F}_{(S\wedge T)-}=\mathcal{F}_{S-}\cap\mathcal{F}_{T-}$.

57 **定理** a) 设 S 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, T 为满足 $S \leqslant T$ 的 $\mathcal{F}_S^\circ$-可测随机变量, 则 T 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时. 如果 S 为 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时, T 为 $\mathcal{F}_{S+}^\circ$-可测随机变量, 并且在 $\{S < \infty\}$ 上 $S < T$, 那么同样的结论仍成立.

特别的, 这一结论可以应用于随机变量 $T = S + t (t > 0)$ 和

(57.1) $$T = S^{(n)} = \sum_{k \geqslant 1} k2^{-n} I_{\{(k-1)2^{-n} \leqslant S < k2^{-n}\}}.$$

b) 假设 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 右连续. 设 S 为停时, $(\mathcal{G}_t^\circ)$ 为 σ-代数流 $(\mathcal{F}_{S+t}^\circ)$, T 为 $\mathcal{F}_\infty^\circ$-可测的非负随机变量, 则 $U = S + T$ 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时当且仅当 T 为 $(\mathcal{G}_t^\circ)$ 停时①.

证 a) 对所有的 u, 我们有

$$\{T \leqslant u\} = \{T \leqslant u\} \cap \{S \leqslant u\}.$$

由于 $\{T \leqslant u\}$ 属于 $\mathcal{F}_S^\circ$, 由 $\mathcal{F}_S^\circ$ 的定义, 可知它属于 $\mathcal{F}_u^\circ$, 并且 T 为停时. 如果在 $\{S < \infty\}$ 上有 $S < T$, 我们可以在上述推理中用 $\{S < u\}$ 代替 $\{S \leqslant u\}$, 细节我们留给读者.

b) 设 T 为 $(\mathcal{G}_t^\circ)$ 停时. 我们有

$$\{U < t\} = \bigcup_b \{S + b < t\} \cap \{T < b\},$$

其中 b 取遍所有小于 t 的有理数. 由于 $\{T < b\} \in \mathcal{G}_b^\circ = \mathcal{F}_{S+b}^\circ$, 因此, 由 $\mathcal{F}_{S+b}^\circ$ 的定义, 我们有 $\{T < b\} \cap \{S + b < t\} \in \mathcal{F}_t^\circ$, 以及 $\{U < t\} \in \mathcal{F}_t^\circ$. 由于 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 右连续, 从而 U 为停时. 反之, 为了简单起见我们假设 S 有限. 如果 U 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, 那么由 (56.1),

$$\{T \leqslant t\} = \{S + T \leqslant S + t\} \in \mathcal{F}_{S+t}^\circ = \mathcal{G}_t^\circ.$$

从而 T 是一个 $(\mathcal{G}_t^\circ)$ 停时. □

58 **推论** 任意 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时 S 都是递减的 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 阶梯停时列的极限, 它同样也可以表示为如下形式的 (一般非降) 停时列 T 的下包络:

(58.1) $$T = aI_A + (+\infty)I_{A^c}, a \in \mathbb{R}_+, A \in \mathcal{F}_a^\circ.$$

证 我们有 $S = \lim_n S^{(n)} = \inf_n S^{(n)}$ (57.1), 其中 $S^{(n)}$ 为如下停时的下确界:

$$k2^{-n} I_{A_k} + (+\infty) I_{A_k^c}, \quad 其中 \quad A_k = \{S^{(n)} = k2^{-n}\}.$$

我们马上给出一个关于 σ-代数完备化的重要应用 (归功于 Dynkin).

59 **定理** 设 $\mathcal{H}_t$ 为把所有 $\mathbb{P}$-零集加到 $\mathcal{F}_t^\circ$ 上得到的 σ-代数. 设 T 为 $(\mathcal{H}_t)$ 停时, 则存在一个 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时 U, 使得 $T = U$ 关于 $\mathbb{P}$ 几乎必然成立. 进一步, 对所有的 $L \in \mathcal{H}_T$, 存在 $M \in \mathcal{F}_{U+}^\circ$, 使得 $L = M$ 关于 $\mathbb{P}$ 几乎必然成立.

①更完整的结果读者可以参见第一版, 第 57 段.

证 为证定理的前一部分我们只需处理形如 (58.1) 的停时的情形, 然后我们再取下包络即可. 我们只需令 $U = aI_B + (+\infty)I_{B^c}$, 其中 B 为 $\mathcal{F}_a^\circ$ 中与 $A \in \mathcal{H}_a$ 在 $\mathbb{P}$ 下几乎必然相等的元素 (因为要取极限, 所以用 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 代替 $(\mathcal{F}_t^\circ)$).

定理的第二部分是前一部分的推论. 由于 $L \in \mathcal{H}_\infty$, 我们取 $L' \in \mathcal{F}_\infty^\circ$ 使得 $L' = L$ 关于 $\mathbb{P}$ 几乎必然成立, 然后我们取 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时 V 使得 $V = T_L$ 几乎必然成立. 于是我们所求的事件 M 为 $(L' \cap \{U = \infty\}) \cup \{V = U < \infty\}$. □

随机区间、可选 σ-代数与可料 σ-代数

定义 *设 U 和 V 为两个定义在 Ω 上的非负数值函数, 并且 $U \leqslant V$. 我们记 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集 $[\![U, V[\![$ 为* 60

$$[\![U,V[\![= \{(t,\omega) : U(\omega) \leqslant t < V(\omega)\}. \tag{60.1}$$

我们可以类似定义形如 $]\!]U,V]\!]$, $]\!]U,V[\![$ 和 $[\![U,V]\!]$ 的 "随机区间". 特别的, 我们记 $[\![U,U]\!] = [\![U]\!]$(U 的图像).

我们使用双括号 $[\![$ 和 $[\![$ 是为了便于区分[①]. 当 U 和 V 为 $\mathbb{R}_+$ 中的元素时, 随机区间 $[\![U,V[\![\subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 即为 $\mathbb{R}_+$ 中通常的区间 $[U,V)$. 注意到我们仅涉及 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集而非 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ 中的子集.

下面我们给出关于 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的一个基本概念.

定义[②] *$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上由轨道右连左极 (第 16 段) 的实值 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 适应过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{O}$ 称为可选 σ-代数或良好可测的 σ-代数.* 61

$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上由轨道在 $(0,+\infty]$ 上左连续的 $(\mathcal{F}_{t-}^\circ)$ 适应[③]过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{P}$ 称为可料 σ-代数.

注 a) 如果我们考虑 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, 那么定义中的过程必须包含一个附加的随机变量 X_∞. 在可选的情形我们要求它是 $\mathcal{F}_\infty^\circ$-可测的; 在可料的情形我们要求它在无穷处左连续.

b) 如果对过程的一般理论做更深入的研究, 读者会意识到这两个 σ-代数应当视为定义在不同空间上的: 可选 σ-代数定义在 $[0,\infty) \times \Omega$ 上, 而可料 σ-代数定义在 $(0,\infty] \times \Omega$ 上. 在讨论可料 σ-代数时, 时刻 0 是至关重要的.

c) 如果我们用右连续 σ-代数流 $\mathcal{G}_t^\circ = \mathcal{F}_{t+}^\circ, \mathcal{G}_{0-}^\circ = \mathcal{F}_{0-}^\circ$ 代替 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$, 那么可选 σ-代数会扩大但是可料 σ-代数保持不变.

d) 如果定义在 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的函数 $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ 关于给定的可选 (相应的, 可料) σ-代数可测, 那么称定义在 Ω 上的过程 (X_t) 为可选 (相应的, 可料) 过程.

[①] 英文版注: 在许多论文中, 作者们并不那么注重形式, 而只是采用通常的括号.
[②] 这两个定义稍许有些不对称, 我们将在第 68 段中加以说明.
[③] 由左连续性, 除去 0 时刻外, 这等价于关于 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 是适应的.

62　**例**[①]　a) 所有由满足 $S \leqslant T$ 的停时对 (S,T) 决定的随机区间为可选集. 这是因为随机区间 $[\![0,T[\![$ 和 $[\![S,+\infty[\![$ 的示性过程是适应的并且轨道右连左极, 从而它们的交 $[\![S,T[\![$ 也有这样的性质. 取 $T = S + 1/n$, 并且令 n 趋于无穷, 我们得到 $[\![S]\!]$ 是可选的, 这样我们也可以推出其他所有随机区间的可选性.

设 Z 为 $\mathcal{F}_S^\circ$-可测的随机变量. 由 $X_t(\omega) = Z(\omega)I_{[\![S,T[\![}(t,\omega)$ 定义的过程 (X_t) 记为 $ZI_{[\![S,T[\![}$. 我们容易验证过程 $ZI_{[\![S,T[\![}$ 是可选的: 用 $\mathcal{F}_S^\circ$-可测的阶梯随机变量逼近 Z, 我们只需验证 Z 为 $\mathcal{F}_S^\circ$ 中元素 A 的示性函数的情形, 此时, $ZI_{[\![S,T[\![}$ 为 $[\![S_A,T_A[\![$ 的示性过程. 对于其他随机区间我们可以得到类似的结果.

b) 如果 S 和 T 为两个 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时, 并且 $S \leqslant T$, 那么随机区间 $]\!]S,T]\!]$ 可料: 事实上, 它的示性函数为 $[\![0,T]\!]$ 和 $]\!]S,\infty[\![$ 的示性函数的乘积, 它关于 $(\mathcal{F}_{t-}^\circ)$ 是适应的且轨道左连续.

当 Z 为 $\mathcal{F}_{S+}^\circ$-可测的随机变量时, 如上所述, 我们容易验证过程 $ZI_{]\!]S,T]\!]}$ 可料.

下面的记号我们将经常使用. 为简单起见, 我们只给出关于实值过程的定义.

63　**定义**　设 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ 为 Ω 上的实值过程, H 为定义在 Ω 上取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 中的函数. 我们定义 $\{H < \infty\}$ 上的函数 X_H 为

(63.1)　$$X_H(\omega) = X_{H(\omega)}(\omega) \text{ (“过程 } X \text{ 在时刻 } H \text{ 的状态”)},$$

并且记 $X_H I_{\{H<\infty\}}$ 为在 $\{H < \infty\}$ 上等于 X_H, 在 $\{H = \infty\}$ 上等于 0 的函数.

当然, 对于过程 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, 我们可以在整个 Ω 上定义 X_H, 而不仅限于 $\{H < \infty\}$ 上.

首先我们研究可选 σ-代数和可料 σ-代数.

64　**定理**　a) 可选 σ-代数被循序 σ-代数所包含 (一般为严格包含).

b) 设 T 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, (X_t) 为循序过程 (特别的, 可选过程), 则函数 $X_T I_{\{T<\infty\}}$ 是 $\mathcal{F}_T^\circ$-可测的. 反之, 如果 Y 为 $\mathcal{F}_T^\circ$-可测的随机变量, 那么存在可选过程 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, 使得 $Y = X_T$.

c) 可选 σ-代数可以由随机区间 $[\![S,\infty[\![$ 生成, 其中 S 是一个停时.

证　a) 我们已经在第 15 段中证明.

b) 设 (X_s) 为循序过程; 对所有的 t, $[0,t] \times \Omega$ 上的映射 $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ 是 $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t^\circ$-可测的. 由于 T 为停时, 映射 $\omega \mapsto T(\omega) \wedge t$ 是 $\mathcal{F}_t^\circ$-可测的. 通过复合, 我们得到 $\omega \mapsto X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t^\circ$-可测的. 设 $Y = X_T I_{\{T<\infty\}}$; 对所有的 t, $YI_{\{T\leqslant t\}} = X_{T\wedge t}I_{\{T\leqslant t\}}$ 是 $\mathcal{F}_t^\circ$-可测的, 这意味着 Y 是 $\mathcal{F}_T^\circ$-可测的 (52.1).

逆命题是显然的: 如果 Y 是 $\mathcal{F}_T^\circ$-可测的, 对 $0 \leqslant t \leqslant \infty$, 我们定义过程 $X_t = YI_{\{t\geqslant T\}}$, 那么 (X_t) 是适应的, 且其轨道右连左极, 并且我们有 $Y = X_T$.

[①] 我们将在后面 (第 89—93 段) 给出其他例子.

c) 设 ℓ_0 为随机区间 $[\![S,T[\![$ 的全体组成的铺砌, 其中 S 和 T 为停时, 并且 $S \leqslant T$. 我们有 $\ell_0 \subset \mathcal{O}$. 现在必须检验每一个轨道右连左极的 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 适应过程 (X_t) 是否是 $\mathcal{T}(\ell_0)$-可测的. 取实数 $\varepsilon > 0$, 我们递归引入下列函数 (其中 d 为 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的一个距离)

(64.1)
$$T_0^\varepsilon = 0, \quad T_{n+1}^\varepsilon(\omega) = \inf\{t > T_n^\varepsilon(\omega) : d(X_{T_n^\varepsilon}(\omega), X_t(\omega)) \geqslant \varepsilon \text{ 或 } d(X_{T_n^\varepsilon(\omega)}, X_{t-}(\omega)) \geqslant \varepsilon\},$$

(64.2)
$$Z_n^\varepsilon(\omega) = X_{T_n^\varepsilon}(\omega) I_{\{T_n^\varepsilon < \infty\}}(\omega).$$

在区间 $[T_n^\varepsilon(\omega), T_{n+1}^\varepsilon(\omega))$ 上, 轨道偏离 $Z_n^\varepsilon(\omega)$ 的距离小于等于 ε. 但是当 $T_{n+1}^\varepsilon(\omega) < \infty$ 时, 它在闭区间 $[T_n^\varepsilon(\omega), T_{n+1}^\varepsilon(\omega)]$ 上的振幅大于等于 ε. 从而由左极限的存在性, 我们得到 T_n^ε 不可能在有限距离有聚点. 因此, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, (X_t) 为过程

(64.3)
$$X_t^\varepsilon(\omega) = \sum_0^\infty Z_n^\varepsilon(\omega) I_{[\![T_n^\varepsilon, T_{n+1}^\varepsilon[\![}(t,\omega)$$

的一致极限. 我们只需证明 (X_t^ε) 是 $\mathcal{T}(\ell_0)$-可测的. 首先我们来验证 T_n^ε 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时: 为了符号上简单起见, 我们只给出第一个是停时的证明. 对 n 用归纳法读者容易证明所有的 T_n^ε 均为停时. 记

(64.4)
$$T = \inf\{t > 0 : d(X_0, X_t) \geqslant \varepsilon \quad \text{或} \quad d(X_0, X_{t-}) \geqslant \varepsilon\}.$$

我们需要验证 $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^\circ$. 为此, 我们注意到 $\{\ \}$ 内的集合为闭集, 从而由 $T = t$ 可以推出 $d(X_0, X_t) \geqslant \varepsilon$ 或 $d(X_0, X_{t-}) \geqslant \varepsilon$. 集合 $\{T \leqslant t\}$ 等价于集合:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists r_n \in \mathbb{Q}_t, d(X_0, X_{r_n}) > \varepsilon - \frac{1}{n},$$

其中 $\mathbb{Q}_t$ 为 $(0,t)$ 中的所有有理数和端点 t 组成的集合. 由于 $\mathbb{Q}_t$ 可数, 这一集合显然属于 $\mathcal{F}_t^\circ$.

对 T_n^ε 的证明完成之后, 我们只需说明 (去掉 ε 和 n 的) 形如 $ZI_{[S,T)}$ 的过程是 $\mathcal{T}(\ell_0)$-可测的, 其中 S 和 T 为两个停时, Z 是 $\mathcal{F}_S^\circ$-可测的. 如果读者留意到例 62.a), 那么他将会发现这显然成立. □

定理 *在通常条件假设下, 可选 σ-代数也可以由 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 适应的右连续过程生成.* 65

证 首先我们证明任意右连续适应过程 (X_t) 都与一个可选过程无区别. 这次采用超限归纳法我们考察 (64.1) 中构造的一个变形, 因为此时左极限未必存在, 所以停时可以在有限点处有聚点: 我们设 $T_0^\varepsilon = 0$. 对每个可数序数 α, 定义

$$T_{\alpha+1}^\varepsilon = \inf\{t > T_\alpha^\varepsilon : d(X_{T_\alpha^\varepsilon}, X_t) > \varepsilon\}.$$

另一方面, 对每个极限序数 β, 记

$$T_\beta^\varepsilon = \sup_{\alpha<\beta} T_\alpha^\varepsilon.$$

$Z_\alpha^\varepsilon, X^\epsilon$ 与 (64.2) 和 (64.3) 中定义的相同, 但是我们需要做点显而易见的修正: 用 α 代替 n, 关于序数求和. 借助严格不等式 "$> \varepsilon$", 我们得到 T_α^ε 为 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 停时, 并且过程 (X_t) 可以由 (X_t^ε) 一致逼近. 另一方面, 由第 0 章第 8 段, 存在序数 α 使得 $T_\alpha^\varepsilon = +\infty$ 关于 $\mathbb{P}$ 几乎必然成立, 我们得到过程 (X_t^ε) 与一个可选过程关于 $\mathbb{P}$ 不可区别, 从而过程 (X_t) 与一个可选过程 (Y_t) 关于 $\mathbb{P}$ 不可区别. 由 $Z_t = X_t - Y_t$ 定义的过程 (Z_t) 为右连续适应的不足道过程. 我们来证明它为可选过程, 这样即可完成证明. 对每个 n, 记 $Z_0^n = Z_0$, 我们定义 (Z_t^n) 如下:

$$\text{当 } t \in (k/n, (k+1)/n] \text{ 时}, Z_t^n = Z_{(k+1)/n},$$

其中 k 取遍所有整数. 因为 (Z_t) 为不足道过程, 所以 $Z_{(k+1)/n}$ 在 $\mathbb{P}$ 下几乎必然等于 0, 从而在通常条件的假设下它是 $\mathcal{F}_{k/n}$-可测的. 这样过程 (Z_t^n) 显然是可选的, 进而当 n 趋于无穷时, 其极限 (Z_t) 亦是可选的. □

这一结果并非最好的结果, 但是我们不打算深究.

由定理的证明过程我们立即可以得到关于过程 "修正" 的一个结果.

66 **定理** *设 (X_t) 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 可选过程, 则存在一个可料过程 (Y_t) 使得集合*

$$A = \{(t,\omega) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} \tag{66.1}$$

为一列停时的图像的并集. 特别的, 对所有的 ω, 截口 $A(\omega)$ 为可数集.

证 首先注意到我们只需证明 A 可以被一列停时的图像的并集所包含: 因为如果 T 为停时, A 为循序集, 那么事件 $L = \{\omega : (T(\omega),\omega) \in A\}$ 属于 $\mathcal{F}_T^\circ$ (定理 64.b)), 并且停时 T_L 的图包含于 A 中. 这样如果 A 被图像 $[\![T^n]\!]$ 的并集所包含, 那么 A 等于相应的图像 $[\![T_{L_n}^n]\!]$ 的并集, 其中 $L_n = \{\omega : (T^n(\omega),\omega) \in A\}$.

另一方面, 我们可以将问题简化为只考虑有界实值过程的情形. 设 $\mathcal{H}$ 为使得定理成立的有界可选实值过程 (X_t) 组成的集合. 通过截断, 我们可以假设相应的可料过程也有界. 我们可以验证 $\mathcal{H}$ 是一个代数, 并且它对于单调收敛封闭 (如果过程 $(X_t^n) \in \mathcal{H}$ 递增收敛到一个有界过程 (X_t), 设与 (X_t^n) 相应的满足定理条件的可料过程为 (Y_t^n), 那么过程 $Y_t = \liminf Y_t^n$ 关于 (X_t) 亦满足定理). 由单调类定理, 我们只需验证定理对生成可选 σ-代数的过程成立. 我们取 (X_t) 为随机区间 $[\![S,T[\![$ 的示性过程, 其中 S 和 T 为停时. 相应的, 我们取可料过程 (Y_t) 为随机区间 $]\!]S,T]\!]$ 的示性过程即可. □

我们给出关于可料 σ-代数的和定理 64 类似的定理.

定理 a) 可料 σ-代数被可选 σ-代数所包含 (从而它被循序 σ-代数所包含). 67

b) 设 T 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, (X_t) 为可料过程, 则函数 $X_T I_{\{T<\infty\}}$ 是 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$-可测的. 反之, 如果 Y 为 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$-可测的随机变量, 那么存在可料过程 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 使得 $Y = X_T$.

c) 可料 σ-代数可以由如下集合生成:

$$(67.1)\quad \{0\}\times A, A\in\mathcal{F}_{0-}^\circ \text{ 和 } (s,t]\times A \quad (0<s<t, s \text{ 和 } t \text{ 均为有理数}, A\in\bigcup_{r<s}\mathcal{F}_r^\circ),$$

也可以由如下集合生成:、

$$(67.2)\quad \{0\}\times A, A\in\mathcal{F}_{0-}^\circ \text{ 和 } [s,t)\times A \quad (0<s<t, s \text{ 和 } t \text{ 均为有理数}, A\in\bigcup_{r<s}\mathcal{F}_r^\circ).$$

证 尽管这一定理的叙述顺序与定理 64 类似, 但是我们先来证明 c).

我们注意到, 由第 62 段, 每个随机区间 $[\![S,T]\!]$ 都是可料的, 其中 S 和 T 为停时 (对宽停时也成立). 反之, 设 (X_t) 为轨道左连续的 $(\mathcal{F}_{t-}^\circ)$ 适应过程, 则 X_t 为如下过程的极限:

$$(67.3)\qquad X^n = X_0 I_{[\![0]\!]} + \sum_{k\geqslant 0} X_{k2^{-n}} I_{]\!]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]\!]}.$$

将 $X_{k2^{-n}}$ 表示为一列递增的 $\mathcal{F}_{(k2^{-n})-}^\circ$-可测阶梯随机变量的极限, 我们可以看出关于由集合 $\{0\}\times A(A\in\mathcal{F}_{0-}^\circ)$ 和随机区间 $]\!]S,T]\!]$ 生成的 σ-代数, (X_t) 是可测的, 其中随机区间 $]\!]S,T]\!]$ 定义如下:

$$(67.4)\qquad \begin{array}{l} \text{对 } 0<s<t, A\in\mathcal{F}_{s-}^\circ, S \text{ 在 } A \text{ 上等于 } s; \text{在 } A^c \text{上等于 } +\infty, \\ T \text{ 在 } A \text{ 上等于 } t; \text{在 } A^c \text{上等于 } +\infty. \end{array}$$

进一步, 我们可以将条件 $A\in\mathcal{F}_{s-}^\circ$ 换为 $A\in\cup_{r<s}\mathcal{F}_r^\circ$, 而不改变所生成的 σ-代数, 从而我们得到生成元集 (67.1). (对上述过程) 稍作修正即得 (67.2).

a) 是显然的: 可料 σ-代数由随机区间生成, 并且这些随机区间属于可选 σ-代数.

最后我们证明 b). 为简单一些起见, 我们假设 T 有界, 则 b) 意味着 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 为可料 σ-代数 $\mathcal{P}$ 在从 Ω 到 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 的映射 $f:\omega\mapsto(T(\omega),\omega)$ 下的原像.

首先我们验证 f 为从 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 到 $\mathcal{P}$ 的可测函数: 我们只需证明对可料 σ-代数的每个生成元 U, $f^{-1}(U)$ 属于 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$. 为此, 取集合 $U=\{0\}\times A(A\in\mathcal{F}_{0-}^\circ)$ 和 $U=(s,\infty)\times A(A\in\mathcal{F}_s^\circ)$, 其原像为 $A\cap\{T=0\}$ 和 $A\cap\{s<T\}$. 这些集合均属于 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$: 对第一种情形, 由 T 为 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$-可测过程 (定理 56.a)) 即得; 对第二种情形, 由定义 54 即得.

然后我们可以验证每个 $A\in\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 都是某个可料集的原像, 即 $f^{-1}(\mathcal{P})$ 包含第 54 段中描述的 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 的生成元集, 这由 c) 立得, 证明细节我们留给读者. □

68 **注** a) 由生成元集 (67.1) 或 (67.2) 我们可以看出, 只要 σ-代数 $\mathcal{F}^\circ_{t-}$ 可分, 可料 σ-代数就可分.

b) 对任意给定的 $\mathcal{F}$-可测非负随机变量 L, 我们可以自然地定义 L 对应的 σ-代数如下:

(68.1) 随机变量 Y 关于 $\mathcal{F}^\circ_L$ (相应的, $\mathcal{F}^\circ_{L-}$) 可测, 当且仅当存在可选 (相应的, 可料) 过程 $(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ 使得 $Y = X_L$.

类似的, 对 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 可选过程我们可以定义 $\mathcal{F}^\circ_{L+}$. 这一定义非常有用.

c) 定义 61 的两部分之间没有对称性 (一部分为右连左极过程, 另一部分为左连续过程) 只是表面现象: 可料 σ-代数也可以由左连右极过程生成! 但是事实上, 可料 σ-代数甚至可由轨道连续的适应过程生成: 如果 A 属于 $\mathcal{F}^\circ_{0-}$, 那么过程 $X_t = tI_A + I_{A^c}$ (关于 σ-代数流 $(\mathcal{F}^\circ_{t-})$) 适应并且它的轨道连续, $\{0\}\times A = \{(t,\omega) : X_t(\omega) = 0\}$; 类似的, 如果 S 为停时, 那么过程 $X_t = (t-S)^+$ 为轨道连续的适应过程, 而随机区间 $[\![S,\infty]\!]$ 等于 $\{(t,\omega) : X_t(\omega) > 0\}$.

可料停时

69 下面的定义并不是关于可料停时的最常用的定义, 但是它对于不用概率的论证更为方便, 而且它等价于 "通常条件" 下的经典定义 (参见定理 77).

由前面的讨论我们可以看出, 如果 T 为停时, 那么区间 $[\![T,\infty[\![$ 可选. 反之, 如果 T 为 Ω 上的非负函数并且区间 $[\![T,\infty[\![$ 可选, 那么 T 为停时. 这是因为若 X 是 $[\![T,\infty[\![$ 的示性函数, 则 X_t 是 $\mathcal{F}^\circ_t$-可测的 (定理 64.b)) 并且它为 $\{T\leqslant t\}$ 的示性函数. 用可料 σ-代数代替可选 σ-代数, 我们有如下定义:

定义 *设 T 为从 Ω 到 $\mathbb{R}_+$ 的映射. 如果随机区间 $[\![T,\infty[\![$ 可料, 那么称 T 为 (关于 σ-代数流 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 的) 可料随机变量或可料停时.*

因为 $\mathcal{P}\subset\mathcal{O}$, 所以可料随机变量为停时, 这一术语由此而来. 显然常数为可料停时.

和离散的情形比较可以帮助我们更好地理解可料停时的概念. 我们给定 σ-代数流 $(\mathcal{F}^\circ_n)_{n\geqslant -1}$, 其中 $\mathcal{F}^\circ_{-1}$ 类似于连续情形下 $\mathcal{F}^\circ_{0-}$ 所起的作用. 可料过程 $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 即为满足对所有的 $n\geqslant 0$, X_n 都是 $\mathcal{F}^\circ_{n-1}$-可测函数的过程. 可料停时 T 就是满足对所有的 $n\geqslant 0$, 集合 $\{T=n\}$ 都属于 $\mathcal{F}^\circ_{n-1}$ 的停时.

如果我们用 σ-代数流 $\mathcal{G}^\circ_t = \mathcal{F}^\circ_{t+}, \mathcal{G}^\circ_{0-} = \mathcal{F}^\circ_{0-}$ 代替 $(\mathcal{F}^\circ_t)$, 那么我们不会改变 σ-代数 $\mathcal{P}$, 相应的可料停时仍然相同. 如果我们用 $\mathcal{F}^\circ_{t-}$ 代替 $\mathcal{F}^\circ_t$, 那么同样的结论仍然成立.

我们将这一定义与停时 T 的 "预报信号" 序列的存在性联系起来.

70 **定义** *设 T 为 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 停时, (T_n) 为递增停时列 (或者仅为宽停时列), 满足对所有*

的 $n, T_n \leqslant T$. 如果在集合 $A \subset \Omega$ 上, 有

$$\text{(70.1)} \qquad \text{对所有的 } n, T_n < T, \ \lim_n T_n = T,$$

那么称 (T_n) 在 A 上发布[1] T.

当然, 如果这一性质在 A 上关于 $\mathbb{P}$ 几乎必然成立, 那么称 (T_n) 在 A 上几乎必然发布 T. 因为由条件 $T_n \leqslant T$ 可以推出在 $\{T=0\}$ 上, $T_n = T$, 所以当我们没有明确指出任何集合 A 时, 称 T_n 发布 T (相应的, 几乎必然发布 T) 意味着在集合 $\{T>0\}$ 上, (T_n) 发布 T (相应的, 几乎必然发布 T). 如果存在一列宽停时 (T_n) 发布 T (相应的, 在 $\mathbb{P}$ 下几乎必然发布 T), 那么称 T 为可发布的[2] (相应的, $\mathbb{P}$-可发布的).

在通常条件下, 每个 $\mathbb{P}$-可发布停时为可发布停时. 这是因为若 (T_n) 在 A^c 上发布 T, 其中 A 为零测度集, 则 A 属于 $\mathcal{F}_0$, 并且停时 $T_n' = T_n I_{A^c} + (T-1/n)^+ I_A$ 处处发布 T.

我们将给出可料停时的基本例子. 在后面我们将看到一个 "几乎逆命题": 每个可料停时在任意概率测度 $\mathbb{P}$ 下都是 $\mathbb{P}$-可发布的.

定理 a) 设 T 为满足 $\{T=0\}$ 属于 $\mathcal{F}_{0-}^\circ$[3]的可发布停时, 则 T 是可料的. 71

b) 每个 $\mathbb{P}$-可发布停时 T 与一个可发布停时几乎必然相等. 从而当 $\mathcal{F}_0^\circ = \mathcal{F}_{0-}^\circ$ 时, T 与一个可料停时几乎必然相等.

证 a) 设 (T_n) 为发布 T 的一个宽停时列, 则区间 $[\![T,\infty[\![$ 为可料集 $\{0\}\times\{T=0\}$ 和 $]\!]T_n,\infty[\![$ 的并集, 从而 T 可料.

为证明 b), 设 (T^n) 为几乎必然发布 T 的一个序列. 我们记 $T' = \lim_n T_n$, 并且对所有的 n, 记 $B_n = \{T=0\} \cup \{T_n < T'\}$, 由 (56.3) 知 B_n 属于 $\mathcal{F}_{T^n+}^\circ$. 所以宽停时列 $S^n = T_{B_n}^n \wedge n$ 递增, 其极限 S 与 T 几乎必然相等. 显然我们有序列 (S^n) 发布 S. □

这里有一个简单的例子: 设 S 为宽停时, T 为一个 $\mathcal{F}_{S+}^\circ$-可测的随机变量, 使得在 $\{S<\infty\}$ 上 $S<T$, 则 T 为停时 (第 57 段): 因为序列 $T_n = n \wedge \left(\frac{1}{n}S + \frac{n-1}{n}T\right)$ 发布 T, 从而 T 为可料停时. 72

在相差一个零测集的意义下, 可料停时的概念和可发布停时的概念可以视为相同, 这即是 "可料" 一词的来源和它的直观含义. 我们以前提到过, 停时的想法即为 "某一给定随机现象的首次发生时刻". 发布序列的存在性意味着这一现象的发生并不是令人惊讶的: 我们通过一系列预报信号可以预见随机现象发生的确切时刻.

下面我们给出可料停时的基本性质.

---

[1] 译校者注: 此处原文法文是动词 annoncer, 英文是 announce 或 foretell, 依词意译为"发布", 在有的中文文献中译为"预报".

[2] 这一术语仅在接下去的几段中会用到.

[3] 通常情况下, 我们有 $\mathcal{F}_{0-}^\circ = \mathcal{F}_0^\circ$, 这一条件一般都满足.

73 **定理** a) 可料停时组成的集合对于运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 封闭.

b) 设 S 为可料停时, T 为停时, 则

$$\text{当 } A \text{ 属于 } \mathcal{F}^\circ_{S-} \text{ 时}, A \cap \{S \leqslant T\} \in \mathcal{F}^\circ_{T-}. \tag{73.1}$$

特别的, 事件 $\{S < T\}, \{S = T\}, \{S \leqslant T\}$ 均属于 $\mathcal{F}^\circ_{T-}$.

c) 设 S 为可料停时, A 为 $\mathcal{F}^\circ_{\infty-}$ 中的元素, 则 $A \in \mathcal{F}^\circ_{S-}$ 当且仅当 S_A 是可料的.

d) 设 (S_n) 为递增可料停时列, $S = \lim_n S_n$, 则 S 是可料的. 对于递减平稳序列 (S_n)(即对所有的 ω, 存在 N, 使得对所有的 k, $S_{N+k}(\omega) = S_N(\omega)$), 同样的结论仍然成立.

证 a) 我们只需注意到 $[\![S \vee T, \infty[\![= [\![S, \infty[\![\cap [\![T, \infty[\![$ 和 $[\![S \wedge T, \infty[\![= [\![S, \infty[\![\cup [\![T, \infty[\![$ 即可.

b) 我们已经知道 $A \cap \{S < T\} \in \mathcal{F}^\circ_{T-}$ (56.2) 和 $A \cap \{T = \infty\} \in \mathcal{F}^\circ_{T-}$ (定理 56.e)), 从而我们只需考虑 $A \cap \{S = T < \infty\}$. 设 I 为这一集合的示性函数, (X_t) 为满足 $I_A = X_S I_{\{S<\infty\}}$ 的可料过程 (定理 67.b)), J 为可料集 $[\![S]\!] = [\![S, \infty[\![\setminus]\!]S, \infty[\![$ 的示性函数, 则 $I = X_T J_T I_{\{T<\infty\}}$, 利用定理 67.b) 即得结论.

取 $A = \Omega$, 我们得到 $\{S \leqslant T\} \in \mathcal{F}^\circ_{T-}$. 我们已经证明 $\{S < T\} \in \mathcal{F}^\circ_{T-}$ (56.2), 取差集, 即得 $\{S = T\} \in \mathcal{F}^\circ_{T-}$.

c) 如果停时 S_A 可料, 设 (X_t) 为 $[\![S_A, \infty[\![$ 的可料示性函数, 我们知道 $X_S I_{\{S<\infty\}}$ 是 $\mathcal{F}^\circ_{S-}$-可测的 (定理 67.b)), 从而 $A \cap \{S < \infty\} \in \mathcal{F}^\circ_{S-}$. 由于 $A \in \mathcal{F}^\circ_{\infty-}$ (定理 56.e)), 对 $A \cap \{S = \infty\}$ 有同样的结论.

反之, 设 $A \in \mathcal{F}^\circ_{S-}$, 由定理 67.b), 存在一个可料过程 (X_t) 使得 I_A 和 X_S 在 $\{S < \infty\}$ 上相等. 于是 S_A 的图像为 S 的图像和可料集 $\{(t, \omega) : X_t(\omega) = 1\}$ 的交集. 而 S 的图像等于 $[\![S, \infty[\![\setminus]\!]S, \infty[\![$, 从而它可料; 因此, $[\![S_A]\!]$ 可料, 进而 $[\![S_A, \infty[\![=]\!]S_A, \infty[\![\cup [\![S_A]\!]$ 可料.

d) 对第一种情形, 我们有 $[\![S, \infty[\![= \cap_n [\![S_n, \infty[\![$; 对第二种情形, 我们有 $[\![S, \infty[\![= \cup_n [\![S_n, \infty[\![$, 即可得证. □

74 **注** 可料 σ-代数可以由形如 $[\![S, T[\![$ 的区间生成, 其中 S 和 T 均为可料停时, 或者均为可料且可发布停时. 在生成元集 (67.2) 中, 形如 $[\![S, T[\![$ 的第二类生成元, 其中 $S = s_A (A \in \cup_{r<s} \mathcal{F}^\circ_r)$ 和 $T = t_A$, 可以由形如 $n \wedge \left(s - \dfrac{1}{n}\right)_A, n \wedge \left(t - \dfrac{1}{n}\right)_A$ 的停时发布, 其中 n 充分大. 对于第一类生成元, 当 $A \in \mathcal{F}^\circ_{0-}$ 时, 我们有 $\{0\} \times A = \cap_n [\![0_A, 0_A + 1/n[\![$, 并且 0_A 可以由序列 $n \wedge 0_A$ 发布.

可料停时的发布序列

为证明定理 71 的 "逆命题", 我们的首要任务是给出 $\mathbb{P}$-可发布停时的类似于定理 73 的性质.

引理 设 $\mathcal{U}$ 为可以由宽停时列几乎必然发布的 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时组成的集合. 75

a) $\mathcal{U}$ 对于运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 封闭, 并且 $0 \in \mathcal{U}, +\infty \in \mathcal{U}$.

b) $\mathcal{U}$ 中递增元素列的极限仍然属于 $\mathcal{U}$.

c) $\mathcal{U}$ 中递减平稳元素列的极限仍然属于 $\mathcal{U}$.

d) 若 S 和 T 均属于 $\mathcal{U}$, 则 S_A 也属于 $\mathcal{U}$, 其中 $A = \{S < T\}$.

e) 设 $S \in \mathcal{U}$, T 为满足 $S = T$ 几乎必然成立的停时, 则 $T \in \mathcal{U}$.

证 a) 设 S 和 T 为 $\mathcal{U}$ 中由 (S_n) 和 (T_n) 几乎必然发布的两个元素, 则 $S \wedge T$ 和 $S \vee T$ 由 $(S_n \wedge T_n)$ 和 $(S_n \vee T_n)$ 几乎必然发布.

b) 设 (T_n) 为 $\mathcal{U}$ 中的递增元素列, 并且对每个 n, $(T_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ 几乎必然发布 (T_n), 则停时 $T = \lim_n T_n$ 可以由序列 $T^p = T_1^p \vee \cdots \vee T_p^p$ 几乎必然发布.

c) 我们仍然假设 T_n 由 (T_n^p) 几乎必然发布, 并且 T_n 为递减平稳序列, 并记 $T = \lim_n T_n$. 考虑某个可以定义 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 上拓扑的有界距离 d (例如 $d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$), 对每个 n, 取整数 n' 使得 $\mathbb{P}\{d(T_n^{n'}, T_n) > 1/n\} \leqslant 2^{-n}$. 我们设

$$U^p = \inf_{n \geqslant p} T_n^{n'}.$$

U^p 为宽停时, 并且序列 (U^p) 递增; 我们记其极限为 U. 由于 $T_n^{n'} \leqslant T_n \downarrow T$, 我们有 $U^p \leqslant T$, 从而 $U \leqslant T$ 处处成立. 因为在 $\{T_n > 0\}$ 上, $T_n^{n'} < T_n$ 几乎必然成立, 所以对所有的 $n \geqslant p$, 在 $\{T_n > 0\}$ 上几乎必然有 $U^p < T_n$, 并且 (T_n) 是平稳的. 从而在 $\{T > 0\}$ 上, $U^p < T$ 几乎必然成立. 最后, 我们几乎必然有 $U = T$, 事实上, 由 $U < T$ 可以推出对充分大的 m, $d(U,T) > 1/m$, 从而对充分大的 p, $d(U^p, T) > 1/m$, 进而对任意充分大的 p, 存在 $n \geqslant p$ 使得 $d(T_n^{n'}, T) \geqslant 1/n$. 由于序列 (T_n) 平稳, 这等价于对充分大的 n, $d(T_n^{n'}, T_n) > 1/n$. 我们得到

$$\{U < T\} \subset \limsup_n \{d(T_n^{n'}, T_n) > 1/n\} \quad \text{p.s.}$$

由 Borel-Cantelli 引理, 这是一个零测集. 综上, 我们即得 (U^p) 几乎必然发布 T.

d) 设 (S^n) 和 (T^n) 为两个几乎必然发布 S 和 T 的序列, 我们设

$$U_n^m = n \wedge S^n_{\{S^n < T^m\}}.$$

对固定的 m, 我们构造出递增 (宽) 停时列 (U_n^m), 其极限 U^m 在 $\{T^m = 0\}$ 上等于 $+\infty$; 在 $\{T^m > 0\}$ 上与 $S_{\{S \leqslant T^m\}}$ 几乎必然相等. 另一方面, 序列 (U_n^m) 几乎必然发布 U^m, 并且 U^m 属于 $\mathcal{U}$. 由于 (U^m) 递减且平稳, 从而由 c) 得到其极限 U 属于 $\mathcal{U}$. 设 (V_n) 为几乎必然发布 U 的序列. 只需设 $V_n' = V_n \wedge S_{\{S\wedge T\}}$, 我们即得这一序列几乎必然发布 $S_{\{S\wedge T\}}$. 因此, $U = S_{\{S<T\}}$ 几乎必然成立.

e) 如果 (S_n) 几乎必然发布 S, 那么 $(S_n \wedge T)$ 几乎必然发布 T. □

下面的定理是证明定理 77 的关键一步, 其思路正是以后我们证明可选和可料截口定理 (第 84 和 86 段) 时会用到的. 此处我们不需要解析集和容度理论去构造辅助测度, 但是在截口的情形相应的构造要精妙得多.

下面的定理并不是其最终的形式, 它在定理 77 中将会有所改进.

76 **定理** *每个可料停时 T 都属于 $\mathcal{U}$.*

证 a) 设 ℓ_0 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的随机区间 $[\![S,T[\![$ 组成的铺砌, 其中 S 和 T 为 $\mathcal{U}$ 中满足 $S \leqslant T$ 的元素. 设 ℓ 为包含 ℓ_0 且对于运算 $(\cup f)$ 封闭的最小集类. 我们即得 ℓ_0 中任意元素的余集为 ℓ_0 中两个元素的并集 ($[\![S,T[\![^c = [\![0,S[\![\cup [\![T,\infty[\![$), ℓ_0 中任意两个元素的交集属于 ℓ_0 ($[\![S,T[\![\cap [\![U,V[\![= [\![S\vee U, S\vee U\vee(T\wedge V)[\![$), 从而 ℓ 为 Boole 代数. 由注 74 我们得到由 ℓ 生成的单调类, 即 σ-代数 $\mathcal{T}(\ell)$, 包含可料 σ-代数.

b) 利用引理 75.a), b), c) 和 d), 我们来证明 ℓ_δ 中元素 B 的首达时与 $\mathcal{U}$ 中的某个元素几乎必然相等.

首先我们证明 ℓ 中元素 C 的首达时属于 $\mathcal{U}$. 由 ℓ 的定义, 我们有 $C = C_1 \cup \cdots \cup C_i$, 其中 C_k 属于 ℓ_0; 于是 $D_C = D_{C_1} \wedge \cdots \wedge D_{C_i}$, 利用引理 75.a) 我们只需证明区间 $C_k = [\![S,T[\![\in \ell_0$ 的首达时属于 $\mathcal{U}$. 而这一首达时等于 $S_{\{S<T\}}$, 利用引理 75.d) 即得证明.

其次, 我们将 B 表示为 ℓ 中递减元素列 (B_n) 的交. 设 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{U}$ 中被 D_B 控制的元素组成的集合; $\mathcal{D}$ 非空 ($0 \in \mathcal{D}$), $\mathcal{D}$ 对于运算 $(\vee d)$ 封闭, 从而存在 $\mathcal{D}$ 中的递增元素列 (H_n), 它的上包络 $H \in \mathcal{U}$ 与 $\mathcal{D}$ 的本质上包络几乎必然相等. 设 $C_n = B_n \cap [\![H,\infty[\![$, S_n 为 C_n 的首达时, 则 C_n 属于 ℓ, 从而 S_n 属于 $\mathcal{U}$. 因为 $H \leqslant D_B$, 我们有 $B_n \supset C_n \supset B$. 因此, $\cap_n C_n = B$, 进而 $S_n \geqslant H$, $S_n \leqslant D_B$. 由 H 为本质上包络可以推出 $S_n = H$ 几乎必然成立. 但 S_n 的图像包含于 C_n 中, 所以 H 的图像几乎必然包含于 $\cap_n C_n = B$ 中, 从而几乎必然有 $H \geqslant D_B$. 最终, $H = D_B$ 几乎必然成立.

c) 我们考虑 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的测度

$$\mu(A) = \int I_A(T(\omega),\omega) I_{\{T<\infty\}}(\omega) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ.$$

这是一个全测度为 $\mathbb{P}\{T<\infty\}$ 的有限测度, 支撑在图像 $[\![T]\!]$ 上. 该图像是可料的, 从而它属于 $\mathcal{T}(\ell)$. 由测度论中的一个经典结果①, 对所有的 $\varepsilon > 0$, 存在 ℓ_δ 中包含于 $[\![T]\!]$ 中的元素 B_ε, 使得 $\mu([\![T]\!] \setminus B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. 设 T^ε 为 $\mathcal{U}$ 中与 B_ε 的首达时几乎必然相等的元素 (上一段中的 b)), 则 T^ε 的图像几乎必然包含于 T 的图像中, 从而停时 $T^\varepsilon_{\{T=T^\varepsilon\}}$ 与 T 几乎必然相等. 由引理 75.e), 它属于 $\mathcal{U}$, 并且它的图像完全被 T 的图像所包含. 从此以后我们记该停时为 T^ε, 则

$$T^\varepsilon \in \mathcal{U}, \ \text{在 } \{T^\varepsilon < \infty\} \text{ 上}, \quad T^\varepsilon = T, \quad \mathbb{P}\{T^\varepsilon < \infty\} \geqslant \mathbb{P}\{T<\infty\} - \varepsilon.$$

① 利用 Choquet 定理, 我们知道这是一个关于铺砌 ℓ 和容度 μ^* 的可容性结果, 其中 $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}(\ell)$ 的每一个元素都是 ℓ-解析的.

设 $S_n = T^{1/2} \wedge \cdots \wedge T^{1/n}$, 则 $S_n \in \mathcal{U}$. 序列 (S_n) 是递减且平稳的, 其极限 S 与 T 几乎必然相等, 由引理 75.c) 和 e) 即得证明. □

我们现在给出关于可料停时发布序列存在性的最终结论. 用阶梯可料停时的精妙逼近归功于 Chung [2]. 为了表述更加清楚, 定理重述了几乎必然发布 T 的序列的定义.

定理 a) 设 T 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 可料停时, 则存在在整个 Ω 上被 T 控制的递增可料停时列 (T_n) 使得 $\lim_n T_n = T$ 关于 $\mathbb{P}$ 几乎必然成立, 并且在 $\{T > 0\}$ 上, 对所有的 n, 关于 $\mathbb{P}$ 几乎必然有 $T_n < T$. 进一步, 我们可以假设每个 T_n 几乎必然取值于有限二进数的集合中. (77)

b) 当通常条件满足时, 上述命题中的 "几乎必然" 可以省略.

证 我们可以假设 T 处处大于 0; 这并不是一个限制, 因为集合 $\{T > 0\} = \Omega'$ 属于 $\mathcal{F}_{0-}^\circ$, 我们可以在 Ω' 上关于诱导测度讨论并且在 $\{T = 0\}$ 上设 $T_n = 0$.

a) 设 (S_n) 为被 T 控制的几乎必然发布 T 的递增宽停时列 (第 76 段). 对所有的 p, 设 S_n^p 为 S_n 的上方二进近似:

$$S_n^p = (k+1)2^{-p} \Leftrightarrow S_n \in [k2^{-p}, (k+1)2^{-p}), S_n^p = \infty \Leftrightarrow S_n = \infty.$$

在定理 57 中我们已经证明 S_n^p 为停时, 并且在第 72 段中已经证明它还是可料的. 因为我们几乎必然有 $S_n < T$, $\lim_n S_n^p = S_n$, 所以对所有的 n, 存在整数 $n' \geqslant n$ 使得

$$\mathbb{P}\{T \leqslant S_n^{n'}\} < 2^{-n}. \tag{77.1}$$

我们记 $U_n = \inf_{m \geqslant n} S_m^{m'}$. 因为 $S_m^{m'} \leqslant T + 2^{-m'}$, 所以 U_n 处处被 T 控制. 序列 (U_n) 递增, 并且由不等式 $S_m^{m'} \geqslant S_m$ 可以推出 $U_n \geqslant S_n$, 从而 $\lim_n U_n \geqslant T$ 几乎必然成立. 最终, 我们几乎必然有 $\lim_n U_n = T$. 由 Borel-Cantelli 引理和 (77.1) 可以推出, 除去一个零测集外, 对所有充分大的 m, $S_m^{m'} < T$. 从而对所有的 n, $U_n < T$. 因此, (U_n) 为一列几乎必然发布 T 的宽停时列.

但是我们可以得到更好的结论: 设 N 为一个零测集, 使得在此零测集外, $\lim_n U_n = T$, 且对所有的 n, $U_n < T$. 设 $w \in N^c$. 因为序列 $(S_p^{p'})$ 介于 U_p 和 $T + 2^{-p}$ 之间, 并且它收敛到 T, 所以 $\overline{\mathbb{R}}$ 中由点 $S_m^{m'}(\omega) (m \geqslant n)$ 和 $T(\omega)$ 组成的子集为紧集, 从而它包含其最小上界 $U_n(\omega)$. 由假设, 它不等于 $T(\omega)$, 从而它等于 $S_m^{m'}(\omega)$ 中的某个值, 由此即得 $U_n(\omega)$ 为有限二进数.

现在我们构造一个可料停时 V_n, 使得 $V_n \leqslant T$ 并且它几乎必然等于 U_n. 为此, 我们注意到递减可料停时列

$$U^k = \inf_{n+k \geqslant m \geqslant n} S_m^{m'}$$

的极限为 U_n, 并且由上述讨论得到它几乎必然平稳. 我们记 $V^k = U^k_{A_k} \wedge T$, 其中 $A_k = \{$对所有的 $i, U^k = U^{k+i}\}$, 则 V^k 为被 T 控制的处处平稳的递减序列. 由定理 73.b) 知其可料. 从而它们的极限 V_n 被 T 控制, 并且它与 U_n 几乎必然相等. 由定理 73.d) 我们推出它可料.

设 $T_n = V_1 \vee V_2 \vee \cdots \vee V_n$, 我们已经构造出一列被 T 控制的递增可料停时列, 并且它们与 U_n 几乎必然相等. 从而它们几乎必然取值于有限二进数集之中, 且几乎必然发布 T.

b) 在通常条件下, 所有的零测集都属于 $\mathcal{F}_{0-}$(因为与可料停时几乎必然相等的停时本身亦可料, 这一假设可以使上述的证明简化很多). 设 N 为 $\{T > 0\}$ 中使得 T_n 不收敛于 T, 或不小于 T, 或不取值于有限二进数集之中的零测度子集. 我们在 N 上对 T_n 做如下修正:

$$\text{当 } k2^{-n} < T(\omega) \leqslant (k+1)2^{-n} \text{ 时}, T_n(\omega) = k2^{-n}; \text{当 } T(\omega) = +\infty \text{ 时}, T_n(\omega) = 2^n.$$

由于 $\mathcal{F}_{0-}$ 包含所有的零测集, T_n 在修正后仍为一个可料停时, 定理成立. □

读者现在可以看出为什么用定义 (第 69 段) 比用发布序列作为可料停时的定义更合适: $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 可料停时的概念并不依赖于 Ω 上概率测度 $\mathbb{P}$ 的选择; 如果 T 可料, 那么在每个概率测度 $\mathbb{P}$ 下存在一列几乎必然发布 T 的序列, 但是这个序列依赖于概率测度 $\mathbb{P}$(我们也可以用存在一列 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 停时在 $\{T > 0\}$ 上处处发布 T 作为可料停时 T 的定义, 这一定义独立于 $\mathbb{P}$, 但是如果采用这种定义, 我们在第 73 段中就会被一连串的 "几乎必然" 所困扰).

读者可以将下面的定理与定理 59 相比较.

78 **定理** *设 $(\mathcal{F}_t)$ 是由 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 通过通常化提升得到的递增 σ-代数族, T 为 $(\mathcal{F}_t)$ 可料停时, 则存在 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 可料停时 T', 使得 T' 与 T 几乎必然相等. 进一步, 对所有的 $A \in \mathcal{F}_{T-}$, 存在 $A' \in \mathcal{F}^\circ_{T'-}$, 使得几乎必然有 $A = A'$.*

证 集合 $\{T = 0\}$ 属于 $\mathcal{F}_{0-}$. 我们取集合 $H \in \mathcal{F}^\circ_{0-}$ 使得 H 与 $\{T = 0\}$ 的差为一个零测集. 我们不改变记号, 只是在 H^c 上修正 T 的值; 在 $H^c \cap \{T = 0\}$ 上, 令它等于 $+\infty$. 今后我们在 H^c 而不是在 Ω 上讨论, 我们可以将问题简化为 T 处处大于 0 的情形. 在 H 上, 令 $T' = 0$, 下面我们可以忽略 H.

设 (T^n) 为发布 T 的 $(\mathcal{F}_t)$ 停时列. 对任意的 n, 设 (R^n) 为满足 $T^n = R^n$ 几乎必然成立的 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 停时 (定理 59). 如有必要, 用 $R^1 \vee \cdots \vee R^n$ 代替 R^n, 我们可以假设序列 (R^n) 递增, 其极限记为 R. 设 $A_n = \{R^n = 0\} \cup \{R^n < R\}$, 则 A_n 递减. 从而 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 停时 $S_n = R^n_{A_n} \wedge n$ 递增, 并且序列 S_n 处处发布其极限 T', 其中 T' 严格大于零. 由定理 71, T' 为 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 可料停时, 并且几乎必然有 $T' = T$.

由注 74 出发, 利用单调类定理, 我们可以证明: 对每个 $(\mathcal{F}_t)$ 可料过程 $(X_t)_{t\in[0,\infty]}$, 存在与 (X_t) 不可区别的过程 $(X'_t)_{t\in[0,\infty]}$, 且它关于 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 是可料的. 证明细节我们留给读者.

最后, 设 $A \in \mathcal{F}_{T-}$, 我们取可料过程 (X_t) 使得 $X_T = I_A$ (定理 67.b)), (X'_t) 为如上所述的不可区别过程, 则所求的事件 A' 即为 $\{X'_{T'} = 1\}$. □

停时的分类

直到第 83 段为止, 我们始终假设 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件.

79 我们引入一些记号. 给定停时 T, $\mathcal{S}(T)$ 是由被 T 控制的递增停时列 (S_n) 组成的集合. 对每个序列 $(S_n) \in \mathcal{S}$, 我们记

$$(79.1) \qquad A[(S_n)] = \{\lim_n S_n = T, \text{对所有的 } n, S_n < T\} \cup \{T = 0\}.$$

如果我们忽略 $\{T = 0\}$ (回顾一下在该理论中, 0 至关重要), 那么 $A[(S_n)]$ 就是可以由序列 (S_n) 发布 T 的点组成的集合. 我们注意到 $A[(S_n)]$ 属于 $\mathcal{F}_{T-}$: 事实上, 记 $S = \lim_n S_n$, $A[(S_n)]$ 为 $\mathcal{F}_{T-}$-可测集 $\{T = 0\}$ (定理 56.a)) 和集合 $(\cap_n\{S_n < T\}) \setminus \{S < T\}$ (定理 56.c)) 的并集. 我们记 $A(T)$ 为所有集合 $A[(S_n)]$ 的本质并集的一个代表元, $I(T)$ 为 $A(T)$ 的余集. 我们注意到 $A(T)$ 始终几乎必然包含 $\{T = 0\}$ 和 $\{T = +\infty\}$.

80 **定义** 当 $A(T) = \Omega$ 几乎必然成立时, 我们称 T 为可及 (停) 时. 当 $A(T) = \{T = +\infty\}$ 几乎必然成立时, 我们称 T 为绝不可及 (停) 时.

换句话说, 如果 $T > 0$ 几乎必然成立, 并且对每个被 T 控制的递增停时列 (T_n), 事件 $\{\lim_n T_n = T, T < \infty\}$ 的概率为零, 那么 T 为绝不可及时. 这意味着不可能通过 "预报信号" 来精确得到 T. 从而 "绝不可及" 为 "可料" 的反义词. 然而, 这里还是有重要的区别: 可料停时的概念可以不依赖于概率测度来定义, 而绝不可及时的概念必须是关于一个概率测度 $\mathbb{P}$ 的.

我们有必要理解可及与可料的区别: 如果 T 为可及时, 那么 Ω 几乎必然等于集合 A_k 的并集, 其中在每个 A_k 上, T 可以由某个序列 (S_n^k) 所发布, 但是在 A_k 外, 序列 (S_n^k) 的性质可以很差. 如果 T 不可料, 那么重新将这些序列组合成一个序列, 使其在整个 Ω 上几乎必然发布 T 是不可能实现的.

我们将在 §4 中看到绝不可及时和可及但不可料的停时的例子.

下面的定理包含了停时分类的基本结果. 更多细节, 特别的, 关于可及时的研究, 读者可以参考 Dellacherie [1].

81 **定理** a) T 可及当且仅当 $[\![T]\!]$ 几乎必然被可数个可料停时的图像的并集所包含.

b) T 绝不可及当且仅当对每一个可料停时 S, 我们有 $\mathbb{P}\{S = T < \infty\} = 0$.

c) 停时 $T_{A(T)}$ 可及, 停时 $T_{I(T)}$ 绝不可及. 这一分解在如下的情形下唯一: 如果 U 和 V 为两个停时, 其中 U 可及, V 绝不可及, 并且满足 $U \wedge V = T, U \vee V = +\infty$, 那么几乎必然有 $U = T_{A(T)}, V = T_{I(T)}$.

证 a) 假设 T 可及, 则存在 $\mathcal{S}(T)$ 中的序列 $(S_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, 使得 Ω 几乎必然为集合 $A[(S_n^k)]$ 的并集. 对每个 k, 我们记 $S^k = \lim_n S_n^k$, 并记

$$R_n^k = (S_n^k)_{\{S_n^k<S^k\}} \wedge n.$$

从而我们定义了一个递增停时列 (R_n^k), 它在 Ω 上处处发布其极限 R^k, 并且 $[\![T]\!]$ 几乎必然被可料停时 R^k 和 0 的图像的并集所包含.

反之, 假设 $[\![T]\!]$ 几乎必然被一列可料停时 T^k 的图像的并集所包含. 对每个 k, 设 (T_n^k) 为发布 T^k 的序列, 并记 $S_n^k = T_n^k \wedge T$, 则序列 (S_n^k) 属于 $\mathcal{S}(T)$, 集合 $\{T = T^k < \infty\}$ 包含于 $A[(S_n^k)]$ 中. 从而 T 是可及的.

b) 设 S 为可料停时, (S_n) 为发布 S 的序列, 并设 $S'_n = S_n \wedge T$, 则序列 (S'_n) 属于 $\mathcal{S}(T)$, 并且 $\{S = T\} \subset A[(S'_n)]$; 因为 T 绝不可及, 所以 $A[(S'_n)]$ 几乎必然被 $\{T = +\infty\}$ 所包含, 并且 $\mathbb{P}\{S = T < \infty\} = 0$.

反之, 假设对每个可料停时 R, $\mathbb{P}\{R = T < \infty\} = 0$. 特别的, 我们有 $\mathbb{P}\{T = 0\} = 0$. 设 (S_n) 为 $\mathcal{S}(T)$ 中的序列, 和 a) 的证明相仿, 我们设 $S = \lim_n S_n$, $R_n = (S_n)_{\{S_n<S\}} \wedge n$, 以及 $R = \lim_n R_n$, 则 R 是可料的, 从而 $\mathbb{P}\{R = T < \infty\} = 0$. 这意味着 $A[(S_n)] \subset \{T = \infty\}$ 几乎必然成立, 从而 T 是绝不可及的.

c) 由 a), $[\![T_{A(T)}]\!]$ 被可料停时的图像的并集所包含, 从而 $T_{A(T)}$ 是可及的. 由 b) 中的前半部分, 如果 S 为可料停时, 那么集合 $\{S = T < \infty\}$ 几乎必然被 $A(T)$ 所包含. 从而有 $\mathbb{P}\{T_{I(T)} = S < \infty\} = 0$, 并且由 b), $T_{I(T)}$ 绝不可及. 唯一性我们留给读者来证明. □

拟左连续 σ-代数流

我们以前提到, 左连续条件 (对所有的 $t, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$) 不足以推出一些有趣的结论. 如果同样的条件不仅限于对常数停时成立, 而且对于所有的可料停时也成立, 这种情形会经常出现. 此时, 停时的分类将会简单得多. 这里我们仅证明一个结果, 更多的细节读者可以参考 Dellacherie [1].

82 **定义** *设 $(\mathcal{F}_t)$ 为满足通常条件的 σ-代数流, 如果对所有的可料停时 T(特别的, $T = 0$ 和 $T = t$), 有 $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$, 那么称 $(\mathcal{F}_t)$ 拟左连续.*

"拟左连续" 中的拟字源自某些 (轨道右连续的) Markov 过程或某些鞅的 "拟左连续" 性质, 这并不能推出存在强的 "左连续"σ-代数的概念. 特别的, "对所有的 t, σ-代数 $\mathcal{F}_t$ 和 $\mathcal{F}_{t-}$ 相等" 是一个比拟左连续性更弱的性质, 从而这一性质并不能称为左连续性.

进一步, 存在拟左连续 σ-代数流使得对于某些非可料停时 T, 等式 $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_T$ 不成立.

83 **定理** *假设 $(\mathcal{F}_t)$ 拟左连续, 则*

a) 每个可及时可料.

b) 对每个递增停时列 (T_n), 设 $\lim_n T_n = T$. 我们有

$$\mathcal{F}_T = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}.$$

证 a) 设 T 是一个可及时, 则存在一列可料时 R_n 的图像的并集包含 T 的图像. 对所有的 n, 集合 $\{R_n = T\}$ 属于 $\mathcal{F}_{R_n}$, 而 $\mathcal{F}_{R_n}$ 等于 $\mathcal{F}_{R_n-}$; 我们记 $S_n = (R_n)_{\{R_n=T\}}$: 由定理 73.c), S_n 是可料的. 所以 T 为一列平稳递减可料停时 $T_n = S_1 \wedge \cdots \wedge S_n$ 的极限; 从而 T 可料 (定理 73.d)).

b) 设 $H = \{对所有的\ n, T_n < T\} \in \mathcal{F}_T$, 且 $S = T_H$, 则 S 是可料的 (它可以被序列 $n \wedge S_n$ 发布, 其中 $S_n = (T_n)_{\{T_n<T\}}$). 设 $A \in \mathcal{F}_T$, 我们分别证明 $A \cap H$ 和 $A \cap H^c$ 属于 $\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$.

1. $A \cap H^c$ 为集合 $A \cap \{T \leqslant T_n\} \in \mathcal{F}_{T_n}$ 的并集 (56.1).

2. $A \cap H$ 属于 $\mathcal{F}_T$. 因为 $T \leqslant S$, 所以 $A \cap H$ 属于 $\mathcal{F}_S$. 由假设, $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S-}$, 由定理 73.c), $A \cap H = A \cap H \cap \{S \leqslant T\}$ 属于 $\mathcal{F}_{T-}$; 从而由定理 56.d), 它属于 $\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n-}$, 因此它属于 $\bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$. □

反之, 如果任意可及时都是可料的, 那么 σ-代数流是拟左连续的. 这是因为如果 T 可料并且 A 属于 $\mathcal{F}_T$, 那么 T_A 是可及的 (第 81 段), 从而它可料, 于是 $A \in \mathcal{F}_{T-}$ (第 73 段).

截口定理

这里我们给出可能是本节中最重要的两个定理: 可选截口定理 和可料截口定理. 我们给出的证明借鉴了 Dellacherie [1], 将命题归结为 "通常" (即不带 σ-代数流) 的截口定理的简单推论, 而后者本身容易作为 Choquet 定理的应用得出. 我们希望借此打消读者心目中常常存在的对于这些定理的恐惧, 那要怪最初的作者们写得很不清楚 (参见本书第一版).

定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为带有 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的完备概率空间, A 为一个可选集. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时 T 满足下列性质: (84)

a) 对所有满足 $T(\omega) < \infty$ 的 ω, 我们有 $(T(\omega), \omega) \in A$.

b) $\mathbb{P}\{T < \infty\} \geqslant \mathbb{P}(\pi(A)) - \varepsilon$[①], 其中 $\pi(A)$ 为 A 在 Ω 上的投影.

证 a) 首先我们利用第 III 章第 44 段选取 A 的一个可测截口, 即一个 $\mathcal{F}^\circ$-可测的实值随机变量 R(一般不为停时), 满足:

$$R(\omega) < \infty \Rightarrow (R(\omega), \omega) \in A,$$
$$\mathbb{P}\{R < \infty\} = \mathbb{P}(\pi(A)).$$

① 完备性使得我们可以用 $\mathbb{P}$ 代替 $\mathbb{P}^*$. 仅在这里用到完备性.

我们利用它来构造 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的测度 μ: 若 G 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ$ 中的元素, 则

$$\mu(G) = \int I_G(R(\omega), \omega) I_{\{R<\infty\}}(\omega) \mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

这个测度的支撑在 A 上, 其全测度等于 $\mathbb{P}(\pi(A))$. 这是我们唯一用到第 III 章结论的地方, 证明余下的部分利用初等测度论知识即可证明.

b) 我们将仿照定理 76 的证明, 取 $\mathcal{U}$ 为所有 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时组成的集合. ℓ_0 为形如 $[\![S, T[\![$ 的区间组成的铺砌, 其中 $S \leqslant T$ 并且 $S, T \in \mathcal{U}$. 记 ℓ 为包含 ℓ_0 且对于运算 $(\cup f)$ 封闭的最小铺砌. 如定理 76 的证明中所述, ℓ 为 Boole 代数, 并且它可以生成可选 σ-代数 (定理 64), 且 ℓ_δ 中元素 B 的首达时几乎必然等于 $\mathcal{U}$ 中的某个元素. 还是和定理 76 的证明一样, 由测度论中的一个经典定理, 存在包含于 A 中的集合 $B \in \ell_\delta$ 使得 $\mu(B) \geqslant \mu(A) - \varepsilon$. 我们记 S 为 $\mathcal{U}$ 中与 B 的首达时几乎必然相等的元素. 因为 "几乎必然", 所以 S 的图像并没有取遍 B, 从而我们取 $T = S_L$, 其中 $L = \{\omega : (S(\omega), \omega) \in B\}$. 由定理 64, 它属于 $\mathcal{F}_S^\circ$, 于是 T 即为所求的停时. □

用同样的方法我们可以得到可料截口定理.

(85) **定理** *设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为带有 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的完备概率空间, A 为一个可料集. 对每个实数 $\varepsilon > 0$, 存在 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 可料停时 T 满足下列性质:*

a) 对所有满足 $T(\omega) < \infty$ 的 ω, 我们有 $(T(\omega), \omega) \in A$.

b) $\mathbb{P}\{T < \infty\} \geqslant \mathbb{P}(\pi(A)) - \varepsilon$, 其中 $\pi(A)$ 为 A 在 Ω 上的投影.

证 如前一证明中第一部分所述, 我们构造一个支撑在 A 上, 全测度为 $\mathbb{P}(\pi(A))$ 的测度 μ. 我们再次仿照定理 76 的证明: 取 $\mathcal{U}$ 为所有可料停时组成的集合. ℓ_0 为形如 $[\![S, T[\![$ 的区间 $(S, T \in \mathcal{U})$ 组成的集合, ℓ 为包含 ℓ_0 且对于运算 $(\cup f)$ 封闭的最小集类. 那么 ℓ 为生成可料 σ-代数的 Boole 代数 (定理 73). 如定理 76 的证明中所述, 我们可以验证, ℓ_δ 中任一元素的首达时几乎必然等于 $\mathcal{U}$ 中的某个元素: 由于它仅依赖于引理 75 中的性质 a), b), c) 和 d), 而这些性质对于可料停时均成立 (定理 73), 从而定理 76 的证明无需改动. 我们还是取包含于 A 中的集合 $B \in \ell_\delta$, 使得 $\mu(B) \geqslant \mu(A) - \varepsilon$. 记 S 为与 D_B 几乎必然相等的可料停时, 我们所求的可料停时为 $T = S_L$, 其中 $L = \{\omega : (S(\omega), \omega) \in B\}$ 属于 $\mathcal{F}_{S-}^\circ$ (定理 73). □

下面是截口定理最常见的应用.

(86) **定理** *设 (X_t) 和 (Y_t) 为两个可选 (相应的, 可料) 过程. 假设对每个停时 (相应的, 可料停时) T, 在 $\{T < \infty\}$ 上几乎必然有 $X_T = Y_T$, 那么这两个过程不可区别.*

证 为简单起见, 我们仅考虑可选过程的情形. 我们只需证明对所有的 $\varepsilon > 0$, 可选集 $A = \{(t, \omega) : X_t(\omega) > Y_t(\omega) + \omega\}$ 为不足道集. 若不然, 由截口定理, 存在停时 T 使得 $\mathbb{P}\{T < \infty\} > 0$, 这与假设矛盾. □

注 a) 该定理可以自然推广到取值于可度量化可分空间 E 的过程 (考虑实值过程 $(f \circ X_t)$ 和 $(f \circ Y_t)$, 其中 f 取遍一个生成 σ-代数 $\mathcal{B}(E)$ 的 Borel 函数组成的可数集). (87)

b) 假设对任意停时 (相应的, 可料停时) T, 随机变量 $X_T I_{\{T<\infty\}}$ 和 $Y_T I_{\{T<\infty\}}$ 可积, 并且它们的期望相等, 那么同样的证明告诉我们这两个过程不可区别.

c) 设 S 为非负随机变量. 则 S 为停时 (相应的, 可料停时) 当 (且仅当) $[\![S]\!]$ 为一个可选 (相应的, 可料) 集. 这是因为存在可选 (相应的, 可料) 停时 T_n 为 $[\![S]\!]$ 的截口, 使得 $\mathbb{P}\{S \neq T_n\} < 1/n$, 那么 $[\![S,\infty[\![$ 与 $\cup_n [\![T_n,\infty[\![$ 无区别. $\cup_n [\![T_n,\infty[\![$ 为可选 (相应的, 可料) 集.

d) 设 H 为可料集, 当首达时 D_H 的图像包含于 H 中 (特别的, H 为右闭集) 时, D_H 可料. 这是因为 $[\![D_H]\!] = H \setminus]\!]D_H,\infty[\![$ 是可料集, 利用上一条注即得.

最后一个定理本质上并没有包含新的内容, 但是它可以作为复习整个小节的一个很好的练习: 它精确地给出某些带有可数截口的可测集的结构, 这些集合在考虑过程的修正时经常作为 "例外集" 出现 (参见定理 66 和注 91.a)). 我们将在随后的章节中看到更多的例子. 88

定理 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为带有 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的完备概率空间.

a) 包含于一列可选停时的图像的并集中的循序集可以表示为一列不相交的可选停时的图像的并, 从而该循序集可选.

b) 包含于一列可料 (相应的, 可选) 停时的图像的并集中的循序集和一列两两不相交的可料停时的图像的并集相等 (相应的, 不可区别).

c) 设 H 为 $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ 中的子集, 并且它被一列非负随机变量的图像的并集所包含, 则 H 有本质唯一 (即在不可区别的意义下唯一) 的分解:

$$H = H' \cup H'',$$

其中 H' 和 H'' 为不相交的可测集, H' 被一列可选停时的图像的并集所包含. H'' 在一个不足道集上与每个可选停时的图像相交. 进一步, 若 H 是可选 (相应的, 可料的), 则 H 与一列 (两两不相交) 的可选 (相应的, 可料) 停时的图像的并集不可区别.

证 设 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的子集 L 包含于一列非负随机变量 (S_n) 的图像的并集中. 我们设 $T_1 = S_1$, 对 $n \geqslant 2$, 在 $\{S_1 \neq S_n, \cdots, S_{n-1} \neq S_n\}$ 上, $T_n = S_n$; 在其他地方, $T_n = +\infty$: 则 T_n 为非负随机变量, 并且它们的图像两两不相交, 且 L 被这些图像的并集所包含. 若 S_n 为可选 (相应的, 可料) 时, 则由第 53 段和定理 56.c) (相应的, 定理 73.b) 和 c)) 我们得到 T_n 亦为可选 (相应的, 可料) 时; 进一步, 如果 L 为循序 (相应的, 可料) 集, 那么对每一个 n, $[\![T_n]\!] \cap L$ 都是一个可选 (相应的, 可料) 时的图像. 循序的情形在前面已经证明了 (定理 66); 可料的情形我们可以类似处理. 事实上, 此时 L 的示性函数 (X_t) 为可料过程, 并且由定理 67.b), $A_n = \{X_{T_n} = 1, T_n < \infty\}$ 属

于 $\mathcal{F}_{T-}$, 从而 $[\![T_n]\!] \cap L$ 为某个可料时的图像, 该可料时在 A_n 上等于 T_n, 在 A_n^c 上等于 $+\infty$. 这样我们就证明了 a), 以及 b) 的一部分. b) 的另一部分我们可以通过 c) 来证明. 现在我们证明 c).

设 $\mathcal{U}$ 为可选 (相应的, 可料) 时组成的集合, 对每个非负随机变量 Z, 设 $V(Z)$ 为集合 $\{Z = T\}$ 的本质并集的代表元, 其中 T 取遍 $\mathcal{U}$. 我们定义两个非负随机变量 Z' 和 Z'', 在 $V(Z)$ 上, $Z' = Z$, 在 $V(Z)^c$ 上, $Z' = +\infty$; 在 $V(Z)^c$ 上, $Z'' = Z$, 在 $V(Z)$ 上, $Z'' = +\infty$. 由定理 81, 我们可以称 Z' 为 Z 的 $\mathcal{U}$-可及部分, Z'' 为 Z 的 $\mathcal{U}$-绝不可及部分: Z' 的图像被 $\mathcal{U}$ 中可数个元素的图像的并集所包含, 并且对所有的 $T \in \mathcal{U}$, $\mathbb{P}\{Z'' = T < \infty\} = 0$.

现在设 H 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中包含于一列非负随机变量 (Z_n) 的图像的并集中的子集. 由上所述, 取 $\mathcal{U}$ 为可选时组成的集合, 存在一列可选时 (T_n) 使得 $\cup_n [\![Z'_n]\!]$ 包含于 $\cup_n [\![T_n]\!]$ 中. 前面我们已经看到, 可以假设图像 $[\![T_n]\!]$ 两两不相交. 记

$$H' = H \cap \left(\bigcup_n [\![Z'_n]\!]\right) = H \cap \left(\bigcup_n [\![T_n]\!]\right), \quad H'' = H \cap \left(\bigcup_n [\![Z''_n]\!]\right) = H \setminus \left(\bigcup_n [\![T_n]\!]\right).$$

集合 H' 和 H'' 即为 c) 中所求的 H 的分解. 显然这一分解在不可区别的意义下是唯一的. 如果 H 是可选的, 那么 H' 和 H'' 也是可选的. 由截口定理 84, 我们得到 H'' 为不足道集, 从而 H 与 H' 不可区别, 而由 a), 后者可以表示为一列两两不相交的可选时的图像的可数并. 如果 H 可料, 我们再回头考虑 H 的分解, 此时取 $\mathcal{U}$ 为可料时组成的集合. 我们就得到了 H 的另一种分解, 其中 H' 可料并且包含于可数个可料时的图像的并集中, H'' 可料并且在一个不足道集上与每个可料时的图像相交: 利用截口定理 85 和 b) 的第一部分, 即可完成证明. □

在第 IV 章的附录中我们将证明: 若 H 为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的可测子集, 满足对所有的 $\omega \in \Omega$, 截口 $H(\omega)$ 至多可数, 则 H 被可数个非负随机变量的图像的并集所包含.

注 a) 如果 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 完备, 每个 Ω 上在 $\mathbb{P}$ 下几乎必然等于零的非负函数为可料时. 由此很容易证明, 在 c) 中, 如果集合 H 是可选 (相应的, 可料) 的, 那么它为一列两两不相交的可选 (相应的, 可料) 时的图像的并.

b) 读者应该注意到, 上述证明中的结论比陈述的命题其实更丰富一些: 在 c) 中, H 也有关于可料时的分解.

c) 我们将在第 4 节 (注 91.b)) 中看到, 存在一个被 (非可选) 随机变量的图像的可数并集所包含的循序集, 其既不可选也不包含任何停时的图像.

下面几段[①]是第 88 段的补充, 我们在写第 VI 章[②] 中某些内容的时候发现它们有用[③], 所以在这里列为定理 88 B, C 和 D. 首尾的两段是关于把某些具有可数截口的集合显式地表示成停时的图像的并集的, 中间的一段是定理 88 B 的一个推论, 可以很方便地用来判定一个可选时的可料性.

定理 *设 (X_t) 是实值右连左极适应过程. 我们记 $X_{0-}=X_0$, 并记* 88B

$$U=\{(t,\omega):X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}.$$

则 U 是可数个两两不相交的停时的图像的并集. 如果 (X_t) 是可料的, 那么也可以选择可料停时满足要求.

证 当然, 所有这些结果都可以由附录中的定理 117 推得, 不过我们觉得在这里给出一个初等的证明更好一些.

定义 $U_n=\{(t,\omega):|X_t(\omega)-X_{t-}(\omega)|>2^{-n}\}(n\geqslant 0)$, 以及 $V_0=U_0$, $V_n=U_n\backslash U_{n-1}$; V_n 都是可选集 (如果 (X_t) 是可料集, 那么它们也都是可料集), 且两两不相交. 然后我们定义

$$D_n^1(\omega)=\inf\{t:(t,\omega)\in V_n\}, D_n^{k+1}(\omega)=\inf\{t>D_n^k(\omega):(t,\omega)\in V_n\},$$

这样 D_n^i 是 (X_t) 的第 i 个幅度介于 2^{-n} 和 2^{-n+1} 之间的跳. 因为 (X_t) 具有右连左极轨道, 所以 V_n 没有有限聚点, 且 D_n^i 这一族停时就会依次取遍 V_n 的所有点. 如果 (X_t) 还是可料的, 那么根据注 87.d), D_n^i 也都是可料的. 最后, 我们只要把二重序列 D_n^i 重排成一个正常的序列即可[④]. □

---

①译校者注: 以下几段是英文版中增加的内容.

②译校者注: 在英文版第二卷中, 作者还指出这些内容对第 VII 章也有用. 我们假设已经在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上给定了一个满足通常条件的 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$. 我们还假设 $\mathcal{F}_{0-}=\mathcal{F}_0$.

③译校者注: 在英文版第二卷中, 作者指出还有一个结论是: 如果 H 是一个右闭可料集, 那么它的首达时 D_H 是一个可料时. 作者还指出: 这个结论其实不用对 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 做那么强的假设. 如果 H 是一个右闭可料集, 它的首达时 D_H 不一定是一个随机变量, 因为我们没有假设 $(\mathcal{F}_t)$ 是完备的. 但是如果 D_H 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, 或者是一个 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时, 那么 D_H 是一个可料时. 这是因为此时 $[\![D_H,\infty[\![=H\cup]\!]D_H,\infty[\![$ 是一个可料集.

类似的, 如果 H 是一个右闭可选集, 而 D_H 是一个 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时, 那么集合 $[\![D_H,\infty[\![$ 是可选的, 从而 D_H 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ 停时.

在第 VIII 章第 11 段中读者可以看到一个一般得多的结论.

④译校者注: 根据英文版第 II 卷, 在这里, 如果要把关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的条件去掉, 就需要利用定理 88D 的证明方法. 设 $\varepsilon>0$, 我们归纳构造

$$T_0^\varepsilon=0,\ T_{n+1}^\varepsilon=\inf\left\{t>T_n^\varepsilon:\left|X_t-X_{T_n^\varepsilon}\right|\geqslant\varepsilon \text{ 或 } \left|X_{t-}-X_{T_n^\varepsilon}\right|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

由第 IV 章定理 64 我们知道这些随机变量都是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, 且当 $n\to\infty$ 时收敛到 ∞. 如果 X 是可料的, 那么由前面的注记可以知道 T_n^ε 也是可料的. 这样集合 U 就包含在 $[\![T_n^\varepsilon]\!]$ 的图像的并集中 (这里 $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon=1/m,m\in\mathbb{N}$). 然后只要稍作改动 (把 T_n^ε 换成 $(T_n^\varepsilon)_{A(n,\varepsilon)}$, 其中 $A(n,\varepsilon)$ 表示事件 "X 在 T_n^ε 有一个跳") 就可以把 U 表示成可数个停时的图像的并集了.

注 对于在一个可度量化可分空间 E 中取值的过程, 上述结论仍成立: 我们只要把 E 嵌入到 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 并对每一个坐标过程应用定理的结论, 再利用定理 88 的证明开头的操作把停时变成两两不相交的即可.

上述注记中的理由也适用于下面这个定理 88 B 的应用. 这里我们暂时中断关于具有可数截口的集合的讨论.

88C **定理** 设 $X=(X_t)$ 是实值右连左极适应过程. 则 X 可料当且仅当下面两个条件满足:

1) 对任意绝不可及时 T, X_T 和 X_{T-} 在 $\{T<\infty\}$ 上几乎必然相等.

2) 对任意停时 T, X_T 在 $\{T<\infty\}$ 上是 $\mathcal{F}_{T-}$-可测的.

证 首先设 X 是可料的. 则根据定理 67, 对于任意 (可选的) T, 条件 2) 都满足. 另一方面, 根据定理 88B, 集合 $U=\{(t,\omega):X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}$ 是可数个两两不相交的可料时的图像的并集, 由此即得 1).

反之, 假设 1) 和 2) 成立. 我们把 U 表示成可数个可选时 S_n 的图像的并集, 再把每个 S_n 分解成其绝不可及部分 S_n^i 和可及部分 S_n^a (定理 81.c)). 根据 1), S_n^i 几乎必然等于 $+\infty$, 这样 $S_n=S_n^a$ 是可及的. 于是由定理 81.a), 我们知道 S_n 的图像包含在可数个可料时 $S_{nk}(k\in\mathbb{N})$ 的图像的并集之中. 设 V 为图像 $[\![S_{nk}]\!]$ 的并集, 由定理 88 我们可以将 V 表示成一族两两不相交的可料时的图像 $[\![T_m]\!]$ 的并集. 对任意的 m, X_{T_m} 和 X_{T_m-} 都是 $\mathcal{F}_{T_m-}$-可测的: 第一个是根据 2), 第二个是根据定理 67. 从而 $\Delta X_{T_m}=X_{T_m}-X_{T_m-}$ 也是 $\mathcal{F}_{T_m-}$-可测的. 根据定理 67, 存在一个可料过程 (Y_t^m), 使得在 $\{T_m<+\infty\}$ 上有 $(Y_{T_m}^m)=\Delta X_{T_m}$. 另一方面, 图像 $[\![T_m]\!]$ 都是可料的. 以 X_- 记过程 $(X_{t-})_{t\geqslant 0}$ $(X_{0-}=X_0)$, 由左连续性可知这是一个可料过程. 我们有

$$X=X_-+\sum_m Y^m I_{[\![T_m]\!]},$$

从而 X 是可料的. □

下面的结果和定理 88 B 类似, 但是处理的是右连续过程, 而不是右连左极过程, 它不是那么有用.

88D **定理** 设 (X_t) 是实值右连续适应过程. 我们记 $X_{0-}=X_0$, 并记

$$U=\{(t,\omega):X_t \text{ 不存在, 或者 } X_t(\omega)\neq X_{t-}(\omega)\}.$$

则 U 是可数个两两不相交的停时的图像的并集. 如果 (X_t) 是可料的, 那么也可以选择可料停时满足要求.

证 为了展示本章中内容的丰富多样性, 我们用另一种办法来证明. 我们只处理可料的情形.

首先, 我们证明 U 是可料的. 为此, 我们定义

$$Y_t^+ = \limsup_{s\uparrow\uparrow t} X_s,\ Y_t^- = \liminf_{s\uparrow\uparrow t} X_s,$$

根据下面的定理 90, 它们都是可料的. 则 U 是可料集 $\{Y^+ \neq X\}$ 和 $\{Y^- \neq X\}$ 的并集. 根据定理 88, 为完成证明, 我们只需说明在至多相差不足道集的意义下 U 被可数个非负随机变量的图像的并集所包含. 这样的随机变量 (可以说明它们是可选的, 但未必是可料的) 可以用下述方法构造. 我们选取一个 $\varepsilon > 0$, 并且用超限归纳法定义

$$T_0^\varepsilon = 0,\ T_{\alpha+1}^\varepsilon = \inf\left\{t > T_\alpha^\varepsilon : \left|X_t - X_{T_\alpha^\varepsilon}\right| > \varepsilon\right\},$$
$$T_\beta^\varepsilon = \sup_{\alpha<\beta} T_\alpha^\varepsilon,\ \text{如果 } \beta \text{ 是极限序数.}$$

因为 X 是右连续的, 在集合 $\{T_\alpha^\varepsilon < \infty\}$ 上我们有 $T_\alpha^\varepsilon < T_{\alpha+1}^\varepsilon$. 这样根据第 0 章第 8 段, 存在一个可数序数 γ_ε, 使得 $T_{\gamma_\varepsilon}^\varepsilon = +\infty$ 几乎必然成立. 所以 U 就包含在所有 $[\![T_\alpha^\varepsilon]\!]$ 的图像的并集之中, 其中 $\varepsilon = 1/n(n \in \mathbb{N})$, 而 $\alpha \leqslant \gamma_\varepsilon$: 当 ε 充分小的时候, 极限序数对应了左极限不存在的情形, 而非极限序数对应了带跳的情形①. □

注 这个结果可以推广到取值于可度量化可分空间 E 的过程, 但是论证过程要稍微复杂一点. 我们把 E 嵌入到 $F = [0,1]^{\mathbb{N}}$ 中, 并注意到如果把 X 看成是取值在 F 中的过程的话, 那么结果是平凡的, 但是问题是 F 中的左极限未必可以作为 E 中的左极限存在. 我们利用 (X_t) 是在 E 中取值的随机过程来分解 U:

$$\begin{aligned} U &= \{X_{t-}\ \text{在}\ E\ \text{中不存在}\} \cup \{X_{t-}\ \text{在}\ E\ \text{中存在且}\ X_{t-} \neq X_t\} \\ &= \{X_{t-}\ \text{在}\ F\ \text{中不存在}\} \cup \{X_{t-}\ \text{在}\ F\ \text{中存在, 但}\ X_{t-} \notin E\} \cup \\ &\quad\ \{X_{t-}\ \text{在}\ E\ \text{中存在且}\ X_{t-} \neq X_t\} \\ &= \{X_{t-}\ \text{在}\ F\ \text{中不存在}\} \cup \{X_{t-}\ \text{在}\ F\ \text{中存在且}\ X_{t-} \neq X_t\}. \end{aligned}$$

这样我们就把问题简化成了过程在 F 中取值的情形, 而这是平凡的.

§4 例子和补充

可选过程和可料过程的例子

我们回到 §2 中关于可测性的结果, 此时在可选 σ-代数或可料 σ-代数下讨论. 基本结果如下 (我们给出两个定理, 一个关于集合, 另一个关于过程, 它们本质上是同一定理).

①译校者注: 根据英文版第 II 卷, 如果这里我们要把关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的条件去掉, 那么就需要考虑所有使得 X_t 或者 $X.$ 在 $t-$ 的聚点到 $X_{T_\alpha^\varepsilon}$ 的距离至少是 ε 的那些 $t > T_\alpha^\varepsilon$ 的下确界.

89　**定理** 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为完备概率空间, 其上的 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件 (为方便起见, 设 $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$). 设 L 为随机循序集合, 则

a) 由 L 的左聚点组成的集合 L_1 在 $(0, \infty]$ 上是可料的.

b) L 的闭包 $\overline{L}$ 是可选的.

c) 由 L 的右聚点组成的集合 L_2 在 $[0, \infty)$ 上是循序的.

90　**定理** 在同样的假设下, 设 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 为实值循序过程, 则

a) 过程 $U_t = \limsup_{s \uparrow\uparrow t} X_s$ 在 $(0, \infty]$ 上是可料的.

b) 过程 $V_t = \limsup_{s \to t} X_s$ 在 $[0, \infty)$ 上是可选的.

c) 过程 $W_t = \limsup_{s \downarrow\downarrow t} X_s$ 在 $[0, \infty)$ 上是循序的.

证 两个定理中的 c) 为定理 32 和定理 33 的重述. 首先我们证明关于集合的论述 a) 和 b). 设

$$A_t(\omega) = \sup\{s < t : (s, \omega) \in L\} \ (t > 0;\ \text{为方便起见, 规定} \sup \varnothing = 0).$$

因为 σ-代数 $(\mathcal{F}_t)$ 是完备的, 由一个常用的关于解析性的结果[①]我们得到 A_t 是 $\mathcal{F}_t$-可测的. 另一方面, 轨道 $A_\cdot(\omega)$ 是左连续且递增的, 从而过程 $(A_t)_{t>0}$ 可料. 而且由于右极限 (A_{t+}) 处处存在, 并且作为右连左极过程关于 σ-代数流 $(\mathcal{F}_{t+}) = (\mathcal{F}_t)$ 适应, 从而它为可选过程. 最后注意到

$$L_1 = \{(t, \omega) : 0 < t \leqslant \infty, A_t(\omega) = t\},$$
$$\overline{L} = \{(t, \omega) : 0 < t < \infty, A_{t+}(\omega) = t\} \cup [\![D_L]\!],$$

即可得证.

由此过渡到过程的证明并不困难: 我们有, $U_t(\omega) \geqslant a$ 当且仅当对所有的 $\varepsilon > 0$, t 为集合 $L_\varepsilon = \{(s, \omega) : X_s(\omega) > a - \varepsilon\}$ 的左聚点. 对 (V_t) 我们可以做类似的讨论. □

91　**注** a) 下面是上述命题的一些补充, 有时会用到.

1) 如果 (X_t) 可料, 那么过程 $U'_t = \limsup_{s \uparrow t} X_s$ 也可料 (对 $t > 0$, $U'_t = U_t \vee X_t$, $U'_0 = X_0$). 类似的, 如果 (X_t) 循序, 那么过程 $W'_t = \limsup_{s \downarrow t} X_s = W_t \vee X_t$ 也是循序的. 与关于可料过程的结论相反, 这个结论没意思.

2) 如果 (X_t) 可选, 那么过程 $V'_t = \limsup_{s \to t, s \neq t} X_s$ 也可选. 事实上, 我们有 $V'_t = U_t \vee W_t$ 并且 $V'_t = \limsup_{s \to t} V'_s$. 由前一等式, 我们得到 (V'_t) 是循序的; 由后一等式, 我们得到它是可选的. 我们顺便得到可选集 $\{V \neq V'\}$ 被如下停时的图像的并集所包含:

$$D_r^{a,b} = \inf\{t \geqslant r : V'_t \leqslant a < b \leqslant V_t\},$$

[①] 例如参见定理 50.

其中 a,b 取遍所有有理数, r 取遍非负有理数. 由 V' 被 V 控制, 并且对固定的 ω, a 和 b, 集合 $\{t : V'_t(\omega) \leqslant a < b \leqslant V_t(\omega)\}$ 离散, 即得上述结论. 由定理 88 我们得到 $\{V \neq V'\}$ 为一列两两不交的停时的图像的并.

b) 我们自然要问, 上述定理中的 c) 是否可以改进. 对于初次阅读的读者, 我们指出, 即使 (X_t) 为可料过程, 定理中的 c) 也不可能被改进. 设 (B_t) 为零初值且轨道连续的布朗运动, $(\mathcal{F}_t)$ 为 σ-代数流 $\mathcal{T}(B_s, s \leqslant t)$ 的一个适当的提升. 设 (X_t) 为随机集合 $M = \{(t,\omega) : B_t(\omega) = 0\}$ 的示性函数. 因为 (B_t) 连续, 所以它可料. 集合 M 为闭集且可料 (我们可以证明它为几乎必然没有内点的完满集). 过程 (W_t) 为集合 L 的示性函数, 其中 L 为 M 中不是右孤立点的点的全体. 集合 $K = M \setminus L$ 表示 M 中右孤立点的全体. 从而 K 为循序集, 在右拓扑下离散, 并且它具有可数截口[1]. 现在设 T 为一个停时, 其图像包含于 K 中; 所以它的图像也包含在 $M = \{t : B_t = 0\}$ 中, 并且由 (B_t) 的强 Markov 性, 我们得到 T 在集合 $\{T < \infty\}$ 上几乎必然为 M 的右聚点. 换句话说, 由 K 的定义, 每个图像包含在 K 中的停时几乎必然无界. 因为 K 不是不足道集, 由定理 84, K 不可选, 从而 $L = M \setminus K$ 循序但不可选. 尽管 (X_t) 可料, 但是 (W_t) 还是不可选.

存在一个截口几乎必然不可数的循序集, 它不包含任何停时的图像. 例如集合

$$H = \left\{ (t,\omega) : \limsup_{h \downarrow\downarrow 0} |B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)| \Big/ \sqrt{2 \log\log \frac{1}{h}} < 1 \right\}.$$

读者可以参见 Knight[2], 或 Dellacherie [7] 中的另一个例子.

我们将定理 17 和 38 更精确化, 但是并不给出详细证明.

定理 92 设 D 为 $\mathbb{R}_+$ 中的可数稠密子集, $(X_t)_{t \in D}$ 为定义在 D 上的一个实值过程, 使得对所有的 $t \in D$, X_t 是 $\mathcal{F}_t$-可测的, 则

a) 过程 $U_t = \limsup_{s \uparrow\uparrow t, s \in D} X_s$ 在 $(0, \infty]$ 上是可料的.

b) 过程 $V_t = \limsup_{s \to t, s \in D} X_s$ 在 $[0, \infty)$ 上是可选的.

定理 93 设 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ 为实值循序过程, 则

a) 过程 $U_t = \lim \sup_{s \uparrow\uparrow t} \operatorname{ess} X_s$ 在 $(0, \infty]$ 上是可料的.

b) 过程 $V_t = \lim \sup_{s \to t} \operatorname{ess} X_s$ 在 $[0, \infty)$ 上是可选的.

(这两个定理可以转化为定理 90. 为证明定理 92, 对循序过程 (Z_t) 我们应用定理 90, 其中当 $t \in D$ 时, $Z_t = X_t$. 当 $t \notin D$ 时, $Z_t = -\infty$. 对于定理 93, 由定理 38 我们得到这些过程是循序的, 对它们应用定理 90 即得. 而如果不对 σ-代数流做任何假设, 我们仍可以 "徒手" 证明两个定理中的 a) 成立.)

[1] 我们很容易将 K 显式地表示为一列图像的并集.

典则空间上的停时

这里我们通过一个例子, 而不是一般的理论, 给出停时和可料停时这两个概念的一种阐释, 从中读者可以很好地理解直观的想法. 这一表示最初作为 "Galmarino 检验" 而闻名 (参见 Itô和 McKean [1], 第 86 页), 随后由 Courrège 和 Priouret [1] 系统地研究和使用.

94　设 E 为波兰空间, $\overline{E}$ 是在 E 上加入孤立点 ∂ 后形成的空间. 我们称所有从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\overline{E}$ 上满足如下性质的右连左极映射 ω:

(94.1)　　集合 $\{t:\omega(t)=\partial\}$为无穷闭区间 $[a,+\infty)$

是取值于 E 的带有生存时的右连左极轨道 (a 可以等于 0 或 $+\infty$). 我们称 a 为 ω 的生存时, 记为 $\zeta(\omega)$.

直观地说, 我们说轨道取值于 E, 因为 ∂ 并不是一个 "真实" 的状态. 它仅是处理取值于 E 但是轨道未必处处有定义的一种数学小技巧.

我们记 Ω 为带有生存时的轨道的全体. $[\partial]$ 为 Ω 中唯一的生存时为 0 的元素. 对所有的 $\omega\in\Omega$, 我们记 $\omega(t)=X_t(\omega)$, 并且引入 σ-代数 $\mathcal{F}^\circ=\mathcal{T}(X_s,s\geqslant 0)$ 和 $\mathcal{F}^\circ_t=\mathcal{T}(X_s,0\leqslant s\leqslant t)$. 我们研究 σ-代数流 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 以及关于它的停时、可选和可料 σ-代数, 等等.

当我们考虑可料过程时, 我们必须定义 $\mathcal{F}^\circ_{0-}$: 这时有两个合理的选择, $\mathcal{F}^\circ_{0-}=\{\varnothing,\Omega\},X_{0-}=\partial$ 或 $\mathcal{F}^\circ_{0-}=\mathcal{F}^\circ_0,X_{0-}=X_0$. 简单起见, 我们采用前一种定义.

95　首先我们定义一些从 Ω 到 Ω 的映射, 它们在这里以及其他许多地方将起到关键性作用.

定义　对任意的 $\omega\in\Omega,t\in\mathbb{R}_+$, 我们定义 Ω 中的元素 $\theta_t\omega,a_t\omega$ 和 $k_t\omega$ 如下:

(95.1)　　$$X_s(\theta_t\omega)=X_{s+t}(\omega)\quad(s\in\mathbb{R}_+),$$

(95.2)　　$$X_s(a_t\omega)=X_{s\wedge t}(\omega),$$

(95.3)　　$$\text{当 } s<t \text{ 时}, X_s(k_t\omega)=X_s(\omega);\ \text{当 } s\geqslant t \text{ 时}, X_s(k_t\omega)=\partial,$$

上述三种算子分别称为 t 平移, 在 t 时刻停驻和在 t 时刻死亡 (英语是 "killing").

为方便起见, 我们还定义

(95.4)　　$$X_\infty(\omega)=\partial,k_0\omega=\theta_\infty\omega=[\partial],a_\infty\omega=k_\infty\omega=\omega.$$

设 ω 和 ω' 为 Ω 中的两个元素. t 为 $\mathbb{R}_+$ 中的元素, 我们定义 Ω 中的元素 $\omega|t|\omega'$ 如下:

$$\begin{aligned}&\text{当 } t \leqslant \zeta(\omega) \text{ 时, 若 } s < t, \text{则 } X_s(\omega|t|\omega') = X_s(\omega);\\ &\qquad\qquad\qquad\quad \text{若 } s \geqslant t, \text{则 } X_s(\omega|t|\omega') = X_{s-t}(\omega).\\ &\text{当 } t > \zeta(\omega) \text{ 时}, \omega|t|\omega' = \omega.\end{aligned} \tag{95.5}$$

下面的定理给出上述定义的各种算子的简单性质.

定理 a) 对任意的 s 和 t, 96

$$\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t},\ a_s \circ a_t = a_{s\wedge t},\ k_s \circ k_t = k_{s\wedge t}. \tag{96.1}$$

$$a_t \circ \theta_s = \theta_s \circ a_{t+s},\ k_t \circ \theta_s = \theta_s \circ k_{t+s}. \tag{96.2}$$

b) 从 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 到 $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$ 的映射 $(t,\omega) \mapsto \theta_t\omega$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ$-可测的, $(t,\omega) \mapsto a_t\omega$ 关于 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 是可选的, $(t,\omega) \mapsto k_t\omega$ 关于 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 是可料的 (方便起见, 规定 $\mathcal{F}_{0-}^\circ = \{\varnothing, \Omega\}$).

c) 对任意的 t, 我们都有 $\mathcal{F}_t^\circ = a_t^{-1}(\mathcal{F}^\circ)$, $\mathcal{F}_{t-}^\circ = k_t^{-1}(\mathcal{F}^\circ)$. 一个 $\mathcal{F}^\circ$-可测的随机变量 Z 关于 $\mathcal{F}_t^\circ$(相应的, $\mathcal{F}_{t-}^\circ$) 可测当且仅当 $Z = Z \circ a_t$(相应的, $Z = Z \circ k_t$).

d) 映射 $(t,\omega,\omega') \mapsto \omega|t|\omega'$ 是从 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ \times \mathcal{F}^\circ$ 到 $\mathcal{F}^\circ$ 的可测映射. 更确切的, $((t,\omega),\omega') \mapsto \omega|t|\omega'$ 是从 $\mathcal{P} \times \mathcal{F}^\circ$ 到 $\mathcal{F}^\circ$ 的可测映射.

证 a) 显然成立. 为证明 b), 我们只需验证对 $\overline{E}$ 上的任意连续函数 f 和任意 $s \in \mathbb{R}_+$, 实值过程 $(t,\omega) \mapsto f(X_s(\theta_t\omega)) = f(X_{s+t}(\omega))$, $f(X_s(a_t\omega)) = f(X_{s\wedge t}(\omega))$ 和 $f(X_s(k_t\omega))$ 分别是可测、可选和可料的. 第一个过程显然可测. 对于第二个过程, 由于其适应且轨道右连左极, 从而它是可选的. 对于第三个过程, 它可以写成 $f(X_s)I_{(s,\infty)} + f(\partial)I_{[s,\infty)}$, 从而它是可料的.

由上即得 c) 中的第一部分. 第二部分我们可以直接验证, 也可以由第 I 章第 18 段推出 (参见第 97 段). 为证明 d), 如上所述, 我们可以验证映射 $((t,\omega),\omega') \mapsto \omega|t|\omega'$ 是 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}^\circ)\times\mathcal{F}^\circ$-可测的. 注意到恒等式 $\omega|t|\omega' = k_t\omega|t|\omega'$, 且映射 $(t,\omega) \mapsto (t, k_t\omega)$ 为从 $\mathcal{P}$ 到 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ$ 的可测映射, 我们即得证明. □

我们给出 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的可选 σ-代数和可料 σ-代数的刻画.

定理 a) 可料 σ-代数 $\mathcal{P}$ 可以由两个映射 $(t,\omega) \mapsto t$ 和 $(t,\omega) \mapsto k_t(\omega)$ 生成. 可选 σ-代数 $\mathcal{O}$ 可以由两个映射 $(t,\omega) \mapsto t$ 和 $(t,\omega) \mapsto a_t\omega$ 生成, 也可以由 σ-代数 $\mathcal{P}$ 和映射 $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ 生成. 97

b) 设 (Z_t) 为可测过程, 则 (Z_t) 为可料 (相应的, 可选) 过程的充分必要条件为对所有的 t, $Z_t = Z_t \circ k_t$ (相应的, 对所有的 t, $Z_t = Z_t \circ a_t$), 或过程 (Z_t) 关于 σ-代数流 $(\mathcal{F}_{t-}^\circ)$ (相应的, $\mathcal{F}_t^\circ$) 适应.

证　为简单起见, 我们处理可料的情形. 首先我们注意到由 $X_s, s < t$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{F}^\circ_{t-}$ 等于 $k_t^{-1}(\mathcal{F}^\circ)$. 从而我们有如下等价关系:

$$(Y \text{ 是}\mathcal{F}^\circ_{t-}\text{-可测的}) \Leftrightarrow (\text{存在一个 } \mathcal{F}^\circ\text{-可测的 } Y', \text{使得 } Y = Y' \circ k_t).$$

但是我们有 $k_t = k_t \circ k_t$, 从而

$$(Y \text{ 是 } \mathcal{F}^\circ_{t-}\text{-可测的}) \Leftrightarrow (Y = Y \circ k_t).$$

由此我们即得 b) 中两种形式的等价性.

现在我们考虑 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的两个 σ-代数:

$\mathcal{H}$, 由取值于 $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ)$ 的映射 $(t, \omega) \mapsto (t, k_t\omega)$ 生成.

$\mathcal{K}$, 由满足对所有的 t, $Z_t = Z_t \circ k_t$ 的可测过程 Z 生成 (即过程关于 σ-代数流 $(\mathcal{F}^\circ_{t-})$ 适应).

显然, $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, 而 $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ 是同样显然的 (因为如果 Z 是 $\mathcal{K}$-可测的, 那么由定义, $Z(t, \omega) = Z(t, k_t(\omega))$). 另一方面, 一个可料过程可测且是 $(\mathcal{F}^\circ_{t-})$ 适应的, 从而 $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$. 由定理 96, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$.

对于可选的情形, 用 a_t 代替 k_t 可以类似讨论. 现在只剩一点需要验证, 即 $\mathcal{O}$ 可以由 $\mathcal{P}$ 和过程 (X_t) 生成. 而对任意 $x \in E$, 我们设 $[x]$ 为恒等于 x 的常数轨道; 映射 $x \mapsto [x]$ 是从 E 到 $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$ 的可测映射, 我们有

$$a_t\omega = k_t\omega|t|[X_t(\omega)].$$

从而 $(t, \omega) \mapsto a_t\omega$ 关于由 $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ 和 $(t, \omega) \mapsto k_t(\omega)$ 生成的 σ-代数可测 (定理 96). □

98　**注**　a) 特别的, 由定理中的 b) 可得, 任意循序过程都是可选的. 这并不与注 91.b) 中的例子矛盾: 在那个例子中, 我们比较的是一个 (做充分) 提升后满足通常条件的典则 σ-代数流对应的可选 σ-代数与循序 σ-代数.

读者可以验证, 用 b) 中的记号, 过程 (Z_t) 为 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 循序过程当且仅当对任意满足 $s < t$ 的 (s, t), $Z_s = Z_s \circ k_t$ (或 $Z_s \circ a_t$). 对于 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 可选过程我们没有类似的刻画.

b) 如果我们考虑右连续轨道 (而不是右连左极轨道), 那么关于 σ-代数 $\mathcal{P}$ 的结论无需修改仍然成立, 但是我们必须用由右连续适应过程生成的 σ-代数 $\mathcal{O}'$ 代替 σ-代数 $\mathcal{O}$. 我们可以证明对任意概率测度 $\mathbb{P}$, $\mathcal{O}'$ 中的元素与 $\mathcal{O}$ 中的元素关于 $\mathbb{P}$ 是不可区别的, 本书中并未给出证明, 读者可以参考 Dellacherie-Meyer [2].

c) 当我们提及 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上由 $(t, \omega) \mapsto (t, k_t\omega)$ 生成的 σ-代数时, 第一个分量 "几乎" 是多余的. 事实上, 由于 $t \wedge \zeta = \zeta \circ k_t$, 在随机区间 $[\![0, \zeta]\!]$ (这是 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 上的有趣部分, 因为在 ζ 后没有任何事情发生) 上, σ-代数由 $(t, \omega) \mapsto k_t\omega$ 单独生成. 关于

由 $(t,\omega) \mapsto \theta_t\omega$ 生成的 σ-代数的研究, 读者可以参考 Azéma [1], 我们也希望在以后的章节中的某个地方来讨论它. 至今为止, 还没有人研究过由 $(t,\omega) \mapsto (t,\theta_t\omega)$ 生成的 σ-代数.

d) 定理 97 以及它如此简单的证明并不是以这种方式发现的: 下面为该定理的原始证明. 因为空间 E 为波兰空间 (在上述证明中我们仅用到 E 可度量化), 所以由取值于 E 的带有生存时的右连左极映射组成的集合 Ω 为 Lusin 空间 (注 19). 我们考虑由 $\mathcal{P}$ 和过程 (X_t) 生成的 σ-代数 $\mathcal{D}$, 可选 σ-代数 $\mathcal{O}$, 由 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 适应的可测过程生成的 σ-代数 $\mathcal{A}$ 以及 σ-代数 $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ$, 则 $\mathcal{D} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, 并且 $\mathcal{M}$ 为 Blackwell σ-代数. 另一方面, $\mathcal{D}$ 可分, 前三个 σ-代数具有相同的原子: (s,ω) 和 (s',ω') 属于 $\mathcal{D}$ 或 $\mathcal{A}$ 中的同一原子当且仅当 $s = s'$ 且 $a_s\omega = a_{s'}\omega'$. 由 Blackwell 定理, $\mathcal{D} = \mathcal{O} = \mathcal{A}$[①].

这一证明看上去比前一简单的证明更繁琐. 然而, 从某种角度上说, 它要比定理 97 中的证明更自然. 下面的命题是利用 Blackwell 定理得到的, 证明我们留给读者.

设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间, 其上的 σ-代数流为递增的 Blackwell σ-代数流 $(\mathcal{F}_t^\circ)$, 则每个 $(\mathcal{F}_{t-}^\circ)$ 停时均可料.

现在我们给出 "Galmarino 检验法", 它用来研究定理 97.b) 的一类特殊情形, 即 (Z_t) 为随机区间的示性函数时的情形. 由于无须为纸张付钱, 我们将给出三个定理, 而不是以 "相应的" 形式合为一个定理, 然后再给出一些注记.

在下面的三个定理中, T 为取值于 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的 $\mathcal{F}^\circ$-可测函数, A 为 $\mathcal{F}^\circ$ 中的元素.

定理 99 a) *T 为可料时当且仅当对任意的 $t \in \mathbb{R}_+$[②], 我们有*

(99.1) $$(T(\omega) \leqslant t, X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s < t \text{ 成立}) \Rightarrow (T(\omega) = T(\omega')).$$

b) *A 属于 $\mathcal{F}_{T-}^\circ$ 当且仅当*

(99.2) $$(\omega \in A, T(\omega) = T(\omega'), X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s < T(\omega) \text{ 成立}) \Rightarrow (\omega' \in A).$$

定理 100 a) *T 为停时当且仅当对任意 $t \in \mathbb{R}_+$, 我们有*

(100.1) $$(T(\omega) \leqslant t, X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s \leqslant t \text{ 成立}) \Rightarrow (T(\omega) = T(\omega')).$$

b) *A 属于 $\mathcal{F}_T^\circ$, 当且仅当*

(100.2) $$(\omega \in A, T(\omega) = T(\omega'), X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s \leqslant T(\omega) \text{ 成立}) \Rightarrow (\omega' \in A).$$

定理 101 a) *T 为宽停时当且仅当对任意 $t \in \mathbb{R}_+$, 我们有*

---

① 关于 $(\mathcal{F}_{t+}^\circ)$ 的可选 σ-代数和循序 σ-代数具有相同的原子, 但是它们不可分: 我们推不出任何结论.

② 注意到 $t = \infty$ 时结论显然成立.

(101.1)
$$(T(\omega) \leqslant t, \text{存在 } \varepsilon > 0, \text{使得当 } s \leqslant t+\varepsilon \text{ 时}, X_s(\omega) = X_s(\omega')) \\ \Rightarrow (T(\omega) = T(\omega')).$$

b) A 属于 $\mathcal{F}^{\circ}_{T+}$ 当且仅当

(101.2)
$$(\omega \in A, T(\omega) = T(\omega'), \text{存在 } \varepsilon > 0, \text{使得当 } s \leqslant T(\omega)+\varepsilon \text{ 时}, X_s(\omega) = X_s(\omega')) \\ \Rightarrow (\omega' \in A).$$

证 首先, 我们证明三个定理中的结论 a). 由于第二个定理比较简单, 我们先来证明它. 我们注意到, 当 (100.1) 成立时, 我们有更弱的蕴含关系.

(100.1′) $$(T(\omega) \leqslant t, X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s \leqslant t \text{ 成立}) \Rightarrow (T(\omega') \leqslant t).$$

反之, 如果 (100.1′) 对任意的 t 成立, 那么 (100.1) 成立. 事实上, 假设 (100.1′) 左端的条件满足, 记 $r = T(\omega)$, 则 $r \leqslant t$, 由这一条件我们可以推出

$$T(\omega) \leqslant r, X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s \leqslant t \text{ 成立}.$$

从而 (在 (100.1′) 中用 r 代替 t) 我们得到 $T(\omega') \leqslant r$. 换句话说, 由 (100.1′) 的左端我们可以推出 $T(\omega') \leqslant T(\omega)$. 由于它也能推出 (100.1′) 的右端, 交换 ω 和 ω', 我们得到

$$T(\omega') \leqslant t, X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s \leqslant t \text{ 成立},$$

并且它可以推出 $T(\omega) \leqslant T(\omega')$. 最终, $T(\omega) = T(\omega')$, 这即为 (100.1).

而 (100.1′) 意味着什么? ($X_s(\omega) = X_s(\omega')$对所有的$s \leqslant t$成立) 可以简记为 $(a_t\omega = a_t\omega')$, 从而 (100.1′) 意味着, 对于等价关系 R_t: $(a_t\omega = a_t\omega')$, 集合 $\{T \leqslant t\}$ 是饱和的, 因为 ω 和 $a_t\omega$ 在模 R_t 下等价, 这等于说 $\{T \leqslant t\} = a_t^{-1}\{T \leqslant t\}$, 利用定理 96.c) 和 T 关于 $\mathcal{F}^{\circ}$ 可测的假定, 这意味着 $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}^{\circ}_t$, 或者说 T 为停时.

对于第三个定理我们不给出细节: 我们可以得到条件, 对所有的 $\varepsilon > 0$, $\{T \leqslant t\} = a_{t+\varepsilon}^{-1}\{T \leqslant t\}$, 也就是 $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}^{\circ}_{t+}$.

同样的, 对于第一个定理, 我们得到 (99.1) 和下述条件等价: 对所有的 t, $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}^{\circ}_{t-}$. 但是这时发生的事情比较有趣: 在这一条件满足时, 并没有一般的定理保证 T 为可料时. 我们必须利用定理 97.b): 作为 $[\![T, \infty[\![$ 的示性函数, 过程 (Z_t) 可测, 且满足 $Z_t = Z_t \circ k_t$, 从而它是可料的.

我们转而证明 b). 以第一个定理为例, 假设 $A \in \mathcal{F}^{\circ}_{T-}$ 并且 ω 和 ω' 满足 (99.2) 的左端. 设 $T(\omega) = t$. 当 $t = +\infty$ 时无须证明. 若不然, 我们有 $T_A(\omega) \leqslant t$, $X_s(\omega) = X_s(\omega')$ 对所有的 $s \leqslant t$ 成立; 由于 T_A 为可料时, 我们得到 $T_A(\omega') = T_A(\omega)$, 从而 $T_A(\omega') < \infty$, 进而有 $\omega' \in A$.

反之, 假设 T 为可料时, 并且蕴含关系 (99.2) 成立. 我们利用 a) 来验证 T_A 为一个可料时: 假设

$$T_A(\omega) \leqslant t, X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ 对所有的 } s < t \text{ 成立}.$$

由此可得 (99.1) 的左端, 从而 (T 是可料的), $T(\omega) = T(\omega')$: 而 (99.2) 的左端成立, 于是 $\omega' \in A$, 并且 $T_A(\omega) = T_A(\omega')$, 这即为所求的结果.

其余两个定理中 b) 部分的证明完全类似. □

注 a) 对于 "检验法" 的实际价值不要抱太高期望: 为证明一个随机变量 T 为停时, 一般而言最难的部分是验证它是 $\mathcal{F}^\circ$-可测的 (另外, 这种情况其实很少发生, 通常我们需要将 σ-代数完备化), 从而 "检验法" 只有在最麻烦的工作已经完成之后才能用上. 我们在这里给出这个 "检验法" 主要是因为它可以帮助我们理解停时这个概念本身. 102

b) 设 T 为取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的 $\mathcal{F}^\circ$-可测函数, 由 "检验法" 立即可以推出:

$$T\text{为停时当且仅当对任意的 } t, \{T = t\} \in \mathcal{F}_t^\circ.$$
$$T\text{为可料时当且仅当对任意的 } t, \{T = t\} \in \mathcal{F}_{t-}^\circ.$$

换句话说, 我们得到与离散情形 (定义 49 后的注和第 69 段) 相同的刻画. 但是这仅对于一类非常特殊的带有 σ-代数流的空间成立.

为了更好地说明 "Galmarino 检验法" 以及我们极少用到的符号 $\omega|t|\mathrm{w}$, 我们给出一类关于停时分解的漂亮定理, 归功于 Courrège 和 Priouret [1].

定理 *设 S 和 T 为两个 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, 并且 $S \leqslant T$. 则存在 $\Omega \times \Omega$ 上取值于 $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数 $U(\omega, \mathrm{w})$ 满足下列性质:* 103

1) $U(.,.)$ 是 $\mathcal{F}_S^\circ \times \mathcal{F}^\circ$-可测的.

2) 当 $S(\omega) = +\infty$, 或 $S(\omega) < \infty$ 且 $X_0(\mathrm{w}) \neq X_S(\omega)$ 时, $U(\omega, \mathrm{w}) = 0$.

3) 对所有的 ω, $U(\omega, .)$ 为停时.

4) 对所有的 ω, $T(\omega) = S(\omega) + U(\omega, \theta_S\omega)$.

证 我们定义 $W(\omega) = T(\omega) - S(\omega)$, 方便起见我们定义 $\infty - \infty = 0$; W 非负且 $\mathcal{F}^\circ$-可测. 定义 $V(\omega, t, \mathrm{w}) = W(\omega|t|\mathrm{w})$, 则 V 是一个 $\mathcal{F}^\circ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ$-可测函数 (定理 96.d)). 最后, 我们设

$$U(\omega, \mathrm{w}) = \begin{cases} V(\omega, S(\omega), \mathrm{w}), & \text{当 } S(\omega) < \infty \text{ 且 } X_0(\mathrm{w}) = X_S(\omega) \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他情形}, \end{cases}$$

可以验证 U 满足定理: 2) 为定义的一部分; 当 $S(\omega) = +\infty$ 时, 4) 显然成立. 当 $S(\omega) < \infty$ 时, 则由下式我们可知 4) 成立.

$$\begin{aligned} U(\omega, \theta_S\omega) &= V(\omega, S(\omega), \theta_S\omega) \quad (\text{由于 } X_0(\theta_S\omega) = X_S(\omega)) \\ &= W(\omega|S(\omega)|\theta_S(\omega)) = W(\omega) = T(\omega) - S(\omega). \end{aligned}$$

为验证 1), 我们首先注意到, 因为 $U(.,.)$ 是一个简单的复合映射, 所以它是 $\mathcal{F}^\circ \times \mathcal{F}^\circ$-可测的, 从而由 S 为严格意义下的停时, 我们知道对所有的 w, $U(\omega, \mathrm{w}) = U(a_S\omega, \mathrm{w})$, 并且 a_S 是从 $\mathcal{F}^\circ_S$ 到 $\mathcal{F}^\circ$ 的可测函数.

现在我们只剩下验证 3), 这里会用到 "检验法" 从而比较有意思. 当 $S(\omega) = +\infty$ 时无须证明. 从而假设 $S(\omega) = s < \infty$, 我们来证明

$$U(\omega, \mathrm{w}) \leqslant t, X_r(\mathrm{w}) = X_r(\mathrm{w}')(\text{对所有的 } r \leqslant t \text{ 成立}) \Rightarrow U(\omega, \mathrm{w}') = U(\omega, \mathrm{w}).$$

因为对于 $r \leqslant t$, 有 $X_r(\mathrm{w}) = X_r(\mathrm{w}')$, 从而我们可以推出 $X_0(\mathrm{w}) = X_0(\mathrm{w}')$. 当 $X_0(\mathrm{w}) \neq X_S(\omega)$ 时, 我们有 $U(\omega, \mathrm{w}) = U(\omega, \mathrm{w}') = 0$, 从而性质 3) 成立. 假设 $X_0(\mathrm{w}) = X_0(\mathrm{w}') = X_S(\omega)$, 我们必须证明 $V(\omega, S(\omega), \mathrm{w}) = V(\omega, S(\omega), \mathrm{w}')$, 或等价的, 因为 $S(\omega) = s$, 证明

$$T(\omega|s|\mathrm{w}) - S(\omega|s|\mathrm{w}) = T(\omega|s|\mathrm{w}') - S(\omega|s|\mathrm{w}').$$

由于 $X_s(\omega) = X_0(\mathrm{w}) = X_0(\mathrm{w}')$, 我们有 $X_r(\omega|s|\mathrm{w}) = X_r(\omega|s|\mathrm{w}') = X_r(\omega)$ 对所有的 $r \leqslant s$ 成立, 所以 (S 为停时) $S(\omega|s|\mathrm{w}) = S(\omega|s|\mathrm{w}') = S(\omega) = s$. 然后由 $X_r(\omega) = X_r(\omega')$ 对所有的 $r \leqslant t$ 成立, 我们可以推出 $X_r(\omega|s|\mathrm{w}) = X_r(\omega|s|\mathrm{w}')$ 对所有的 $r \leqslant s+t$ 成立. 又因为 T 是停时, 并且 $T(\omega|s|\mathrm{w}) = S(\omega|s|\mathrm{w}) + U(\omega, \mathrm{w}) \leqslant s+t$, 我们得到 $T(\omega|s|\mathrm{w}) = T(\omega|s|\mathrm{w}')$, 从而有 $U(\omega, \mathrm{w}) = U(\omega, \mathrm{w}')$. □

一个简单的实例研究

这个例子在 Dellacherie [1] 中已经研究过, 不过后来 R.Getoor 指出了原来的证明中存在好几处错误, 我们希望在这里修正. 尽管看上去平淡无奇, 但是它在一些实际的概率应用问题中会起到关键作用 (参见 Chou-Meyer [2]). 在第 VI 章中我们还会看到, 它体现出鞅论的威力.

104　这里的集合 Ω 为区间 $(0,\infty)$, 其上的 Borel σ-代数记为 $\mathcal{F}^\circ$. 我们记 T 为从 Ω 到 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的恒等映射.

对每个 $t \in \mathbb{R}_+$, 设 $\mathcal{F}^\circ_t$ 为由 $T \wedge t$ 生成的 σ-代数, 或等价的, 由 Borel 集 $(0,t)$ 和原子 $[t,\infty)$ 生成的 σ-代数①. $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 为满足 $\mathcal{F}^\circ_t = \mathcal{F}^\circ_{t-}$ 的 σ-代数流, 但是并不满足 $\mathcal{F}^\circ_t = \mathcal{F}^\circ_{t+}$ ($\mathcal{F}^\circ_{t+}$ 为将原子 $[t,\infty)$ 分成两个原子 $\{t\}$ 和 (t,∞) 所生成的 σ-代数). 随机变量 T 为 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 停时, 但不是 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 停时.

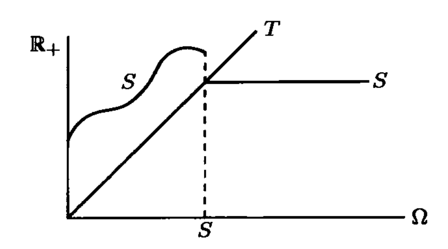
下面为 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 停时和 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 停时的刻画:

105　**定理**　非负随机变量 S 为 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ (相应的, $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$) 停时当且仅当存在一个常数 s(可能等于 $+\infty$) 使得

a) 在 $\{T < s\}$ 上, $S > T$ (相应的, 在 $\{T \leqslant s\}$ 上, $S \geqslant T$).

b) 在 $\{T \geqslant s\}$ 上, $S = s$ (相应的, 在 $\{T > s\}$ 上, $S = s$).

①方便起见, 我们约定 $\mathcal{F}^\circ_{0-} = \mathcal{F}^\circ_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.



证 我们仅证明 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时的情形. 如果 S 满足定理中的条件, 那么对所有的 t, $\{S \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^\circ$: 事实上, 当 $t < s$ 时, 集合 $\{S \leqslant t\}$ 包含于 $\{T < t\}$ 中, 而集合 $\{S \leqslant t\}$ 为 $(0, t)$ 中的 Borel 集, 从而它属于 $\mathcal{F}_t^\circ$; 当 $t \geqslant s$ 时, 集合 $\{S \leqslant t\}$ 包含整个原子 $[t, \infty)$, 从而它也属于 $\mathcal{F}_t^\circ$.

反之, 设 S 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, 如果 $S > T$ 处处成立, 那么我们无须证明任何东西. 如果存在某个 ω 使得 $S(\omega) \leqslant T(\omega)$, 我们取 $s = S(\omega) \leqslant T(\omega) = \omega$. 集合 $\{S = s\}$ 属于 $\mathcal{F}_s^\circ$, 并且它包含 ω, 而 ω 属于原子 $[s, \infty)$, 从而集合 $\{S = s\}$ 包含整个原子 $[s, \infty)$, 我们即得条件 b). 现在, 设 $\omega' < s$, 若 $s' = S(\omega') \leqslant T(\omega') = \omega'$ 成立, 则我们有 $s' < s$. 集合 $\{S = s'\} \in \mathcal{F}_s^\circ$ 包含原子 $[s', \infty)$ 中的点 ω', 从而它包含整个原子, 我们得到在 $[s, \infty)$ 上, $S = s'$, 但是此时我们有 $S = s$ 并且 $s \neq s'$, 矛盾. 从而 $S(\omega') > T(\omega')$, 条件 a) 成立. □

定理 *每个 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时都是可料的.* 106

证 设 S 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时, s 为定理 105 中定义的常数. 当 $s = 0$ 时, 我们有 $S \equiv 0$, 从而 S 可料; 假设 $s > 0$, (s_n) 为一列非负实数, 满足 $s = \lim \uparrow\uparrow s_n$, 则 S 被一列 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 停时 S_n 所发布, 其中 S_n 定义如下:

$$S_n = \begin{cases} n \wedge \left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) S + \dfrac{T}{n}\right), & \text{在 } \{T < n \wedge s_n\} \text{ 上}, \\ n \wedge s_n, & \text{在 } \{T \geqslant n \wedge s_n\} \text{ 上}. \end{cases}$$

现在我们给定 $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$ 上的一个概率测度 $\mathbb{P}$. 记 σ-代数 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}^\circ$ 的完备化, $(\mathcal{F}_t)$ 为 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 的通常化提升.

定理 *如果概率测度 $\mathbb{P}$ 为扩散测度, 那么 σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 是拟左连续的, 并且 T 是一个绝不可及时.* 107

如果概率测度 $\mathbb{P}$ 为非退化且仅在原子上定义的测度, 那么 T 为可及非可料时.

证 首先我们证明定理的第二部分. 概率测度 $\mathbb{P}$ 支撑在可数集 D 上, 并且 T 的图像在 $\mathbb{P}$ 下几乎必然被图像 $[\![t]\!], t \in D$ 的并所包含. 因为常数为可料时, 所以 T 是可及的 (定理 81). 假设 $\mathbb{P}$ 非退化, 则 $\mathbb{P}$ 在满足 $u < v$ 的两个点 u 和 v 上非零. 如果 T 可料, 那么存在 $(\mathcal{F}_t^\circ)$ 可料时 S 使得 $S = T$ 几乎必然成立, 从而 $S(u) = T(u)$ 且 $S(v) = T(v)$. 由定理 105, 这可以推出 $u = v$, 矛盾.

假设 $\mathbb{P}$ 为扩散测度. 因为每个形如 $\{t\}$ 的集合为零测集, 所以对 $\mathcal{F}^\circ_{t-} = \mathcal{F}^\circ_t$ 加上所有零测集和对 $\mathcal{F}^\circ_{t+}$ 加上所有零测集后所得的 σ-代数相等, 从而 $(\mathcal{F}_t)$ 恰好为 σ-代数流 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 的完备化. 首先我们证明 T 绝不可及. 设 S 为满足 $S \leqslant T$ 的 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, 则存在 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 停时 R 使得 $S = R$ 几乎必然成立 (定理 59). 如有必要, 用 $R \wedge T$ 代替 R, 我们可以假设 $R \leqslant T$ 处处成立. 但是, 由定理 105, R 形如 $T \wedge s$, 且几乎必然有 $S = T \wedge s$. 设 (S_n) 为被 T 控制的递增停时列, 其中每一个 S_n 几乎必然具有 $T \wedge s_n$ 的形式, s_n 递增收敛到 s. 集合 $\{\lim_n S_n = T,$ 对所有的 $n, S_n < T\}$ 几乎必然被 $\{T = s\}$ 包含, 因为 $\mathbb{P}$ 为扩散测度, 所以它为零测集.

最后, 我们证明 $(\mathcal{F}_t)$ 是拟左连续的. 设 U 为 $(\mathcal{F}_t)$ 可料时, A 为 $\mathcal{F}_U$ 中的元素. 我们证明 A 属于 $\mathcal{F}_{U-}$. 因为所有的零测集都属于 $\mathcal{F}_{0-}$, 我们只需证明 A 与 $\mathcal{F}_{U-}$ 中的某个元素几乎必然相等. 而 U_A 为 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, 从而它与某个 $(\mathcal{F}^\circ_{t+})$ 停时 V 几乎必然相等 (定理 59). 因为 U 可料并且 T 绝不可及, 所以 $\mathbb{P}\{U = T\} = 0$. 如有必要, 用 $V_{\{V \neq T\}}$ 代替 V, 我们可以假设 V 与 T 处处不相等. 由定理 105, 我们得到 V 为 $(\mathcal{F}^\circ_t)$ 停时, 从而 V 是可料时, 并且 A 与属于 $\mathcal{F}_{U-}$ 的集合 $(A \cap \{U = \infty\}) \cup \{V = U\}$ 几乎必然相等. □

108 **注** a) 如果 $\mathbb{P}$ 为扩散测度, 那么对所有的 t, σ-代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 满足 $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, 从而每个 $(\mathcal{F}_t)$ 停时仍为 $(\mathcal{F}_{t-})$ 停时, 但是不能得到每个 $(\mathcal{F}_t)$ 停时都可料.

b) 假设 $\mathbb{P}$ 为扩散测度且 $\mathbb{P}$ 的支撑的下确界为 0. 我们已经看到, 每个满足 $S \leqslant T$ 的停时 S 与 $T \wedge s$ 几乎必然相等, 其中 s 为一个常数. 从而只有当 $S = 0$ 几乎必然成立时, $S < T$ 才几乎必然成立. 换句话说, 可选集 $[\![0, T[\![$ 不存在完全截口.

第 III 章附录

下面的结果不是说不如正文中的结果吸引人: 只是 (目前) 它们在测度论或位势理论中, 还没有找到重要的应用. 读者必须认识到, 第 III 章的结果, 或 Bourbaki 的 Topologie Générale 的第 IX 章中的结果仅仅是描述集合论的初等结果, 这一理论随后由波兰和苏联的数学家, 以及现代的逻辑学家发展到了难以置信的高度. 附录中的最后三个定理向读者展示了进一步的内容.

我们继续使用第 III 章中的编号.

Souslin 系统[①]

在概率论中, 解析集作为 Borel 集的投影自然地引入, 这就是我们在正文中的定义. 但是解析集最早的并且最为常用的定义是由 Souslin 给出的, 我们现在来证明这个定义与正文中的定义等价, 同时它与本书的第一版中给出的看上去更一般的定义也是等价的.

我们记 S 为全体有限 (非负) 整数序列组成的集合, Σ 为全体无穷 (非负) 整数序列组成的集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: 如果我们已经给定 $\mathbb{N}$ 上离散拓扑以及 Σ 上的乘积拓扑, 那么 Σ 是波兰空间, 并且它是可度量化紧空间 $(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^{\mathbb{N}}$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集. 我们记 $|s|$ 为有限序列 $s\in S$ 的长度. 符号 $s\prec t$, 其中 $s\in S, t\in S$ 或 $t\in\Sigma$, 表示 t 由 s 开头: 例如 $s=3,1,4$, $t=3,1,4,1,6$. 最后, 对于 $\sigma\in\Sigma$, 我们记 $\sigma(n)$ 为 σ 的第 n 项, 有限序列 $\sigma(1),\cdots,\sigma(n)$ 记为 $\sigma|n$. 当 $s\in S$ 且 $n\leqslant|s|$ 时, 符号 $s(n)$ 和 $s|n$ 的含义类似可知. 75

①译校者注: 这里的法文原文是 Schéma de Souslin, 英文是 Souslin Scheme.

定义 设 $(F,\mathcal{F})$ 为铺砌集, $\mathcal{F}$ 上的一个 Souslin 系统是从 S 到 $\mathcal{F}$ 的一个映射 $s \mapsto B_s$. Souslin 系统的核定义为集合

$$B = \bigcup_{\sigma} \bigcap_{s \prec \sigma} B_s = \bigcup_{\sigma} \bigcap_{n} B_{\sigma|n}.$$

我们也称 B 为 Souslin (A) 运算作用在确定性系统 $(B_s)_{s\in S}$ 上的结果. 若对于 $s \prec t$, 都有 $B_s \supset B_t$, 则称该 Souslin 系统正则. 如果 $\mathcal{F}$ 对于运算 $(\cap f)$ 封闭, 那么正则 Souslin 系统 $B'_s = \cap_{r \prec s} B_r$ 也为 $\mathcal{F}$ 上的 Souslin 系统并且它们具有同样的核 B. 从而不失一般性, 我们仅考虑正则系统.

我们现在先来证明每个 $\mathcal{F}$-解析集, 甚至是某种更一般意义下的 $\mathcal{F}$-解析集 (参见第一版, 第 56 页), 都是 $\mathcal{F}$ 上的 Souslin 系统的核.

76 **定理** *设 $(E,\mathcal{E})$ 和 $(F,\mathcal{F})$ 为两个铺砌集, 其中铺砌 $\mathcal{E}$ 是半紧的. 设 B 为 $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 中的元素, A 为 B 在 F 上投影, 则 A 为 $\mathcal{F}$ 上的 Souslin 系统的核.*

证 由定义, B 可以写成

$$B = \bigcap_{n} \bigcup_{m} (E_{nm} \times F_{nm}), \quad E_{nm} \in \mathcal{E}, F_{nm} \in \mathcal{F}.$$

交换并集和交集运算, 我们得到

$$B = \bigcup_{\sigma} \bigcap_{n} (E_{n\sigma(n)} \times F_{n\sigma(n)}).$$

对每个长度为 n 的 $s \in S$, 当 $\cap_{m \leqslant n} E_{ms(m)} \neq \varnothing$ 时, 记 $A_s = F_{ns(n)}$, 对于其他情形, 记 $A_s = \varnothing$; 设 π 为对 F 的投影, 我们有

$$\pi\left(\bigcap_{1\leqslant n\leqslant N} E_{n\sigma(n)} \times F_{n\sigma(n)}\right) = \bigcap_{1\leqslant n\leqslant N} A_{\sigma|n}.$$

因为铺砌 $\mathcal{E}$ 半紧, 由第 6 段,

$$\pi\left(\bigcap_{n} E_{n\sigma(n)} \times F_{n\sigma(n)}\right) = \bigcap_{n} A_{\sigma|n}.$$

对 σ 取并集, 我们即得所求的结果

$$A = \pi(B) = \bigcup_{\sigma} \bigcap_{n} A_{\sigma|n}. \qquad \square$$

77 我们转而考虑逆命题. 实际上我们可以给出一个更精确的结果: $\mathcal{F}$ 上 Souslin 系统 (A_s) 的每一个核 A 都是 $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 中的元素在 $\mathcal{F}$ 上的投影, 其中 $\mathcal{E}$ 为可度量化

紧空间 $E=(\mathbb{N}\cup\{\infty\})^{\mathbb{N}}$ 中所有紧子集组成的铺砌. 从而在定义 7 中我们无须取 "所有" 的可度量化紧空间作为辅助空间, 取 E 即可①.

我们引入一个方便的术语: 对所有的 $s\in S$, 集合 $\{\sigma\in\Sigma, s\prec\sigma\}$ 称为指标为 s 的岛, 记为 I_s. 显然, 当 $s\prec t$ 时, $I_s\supset I_t$; 当 $t\prec s$ 时, $I_s\subset I_t$; 当 s 和 t 不可比较时, $I_s\cap I_t=\varnothing$. 岛既是开集也是闭集, 并且它们构成拓扑 Σ 的一个可数基.

定理 *设 A 为 $\mathcal{F}$ 上 Souslin 系统 (A_s) 的核, 则 A 为 $\Sigma\times F$ 中的集合 B 在 F 上的投影, 其中*

$$B=\bigcap_n\bigcup_{|s|=n}(I_s\times A_s)=\bigcup_\sigma\bigcap_n(I_{\sigma|n}\times A_{\sigma|n})=\bigcup_\sigma\Big[\{\sigma\}\times\Big(\bigcap_n A_{\sigma|n}\Big)\Big].$$

如果将 $\Sigma\times F$ 作为 $E\times F$ 中的子集, 那么 $B\in(\mathcal{E}\times\mathcal{F})_{\sigma\delta}$.

证 B 的第一个和第二个表达式的等价性由定理前面关于岛的注释即得; 第二个和第三个表达式的等价性是显然的. 由第三个表达式即得 $\pi(B)=A$.

设 $\overline{I}_s$ 为 I_s 在 E 中的闭包; 由于 I_s 为闭集, $I_s=\overline{I}_s\cap\Sigma$, 并且 $\cap_n\cup_{|s|=n}(I_s\times A_s)$ 为 $(\mathcal{E}\times\mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 中的元素 $\cap_n\cup_{|s|=n}(\overline{I}_s\times A_s)$ 与 $\Sigma\times U$ 的交集, 其中 U 为所有 A_s 的并集. 由于 Σ 为 E 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 从而 Σ 也为 $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ 集; 同理, U 为 $\mathcal{F}_\sigma$ 集, 从而它为 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 集. 最终, $\Sigma\times U$ 为 $(\mathcal{E}\times\mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 集, 定理成立. □

注 我们可以看出 $\mathcal{F}$-解析集正好就是从 $\mathcal{F}$ 出发通过 Souslin (A) 运算得到的那些集合. 定理 10 中的结果 $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))=\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 意味着, $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 上的一个 Souslin 系统的核 (它本身为 $\mathcal{F}$ 上的所有 Souslin 系统的核组成的集合) 仍为 $\mathcal{F}$ 上某个 Souslin 系统的核, 这一结果 ((A) 运算的 "幂等" 性质) 的证明有一定的技巧性: 参见 Hausdorff [1].

Souslin 空间和 Lusin 空间的补充知识

在定义 16 中, 我们定义可度量化 Souslin (相应的, Lusin) 空间为与可度量化紧空间中的解析 (相应的, Borel) 子空间同胚的空间. 在定义 67 中, 我们将这一定义推广到未必可度量化的分离空间, 一个这样的空间称为 Souslin (相应的, Lusin) 空间, 如果它为某个可度量化 Souslin (相应的, Lusin) 空间在连续映射 (相应的, 连续单射) 下的像. 在这里我们将证明可度量化紧空间中的每一个解析 (相应的, Borel) 子集是波兰空间在连续映射 (相应的, 连续单射) 下的像. 从而我们的定义与 Bourbaki 的定义 (Top. Gén., 第 IX 章, § 6) 等价.

定理 *设 E 为紧度量空间 F 中的解析子集, 则存在从波兰空间 $\Sigma=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 到 E* 78

①(在解析集的定义中) 可以选取一个唯一的辅助紧集并不是多么伟大的发现, 因为所有的可度量化紧空间可以嵌入到 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 中.

第 III 卷补注: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的由岛构成的铺砌是抽象紧铺砌 (第 III 章定义 3) 的绝妙的(也是我们知道的唯一一个自然的) 例子.

的连续映射.

证 设 $\mathcal{F}$ 为 F 中紧子集组成的铺砌, G 为一个辅助紧空间, $\mathcal{G}$ 为 G 中紧子集组成的铺砌, 使得 E 为集合 $H \in (\mathcal{G} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ 在 F 上的投影, 其中

$$H = \bigcap_n \bigcup_m (A_{nm} \times B_{nm}), \quad A_{nm} \in \mathcal{G}, B_{nm} \in \mathcal{F}.$$

设 d 为定义了 F 上拓扑的距离. 如有必要, 用 B_{nm} 与适当的球取交集并且对指标 m 做适当的修正来代替 B_{nm}, 我们可以假设所有紧集 B_{nm} (在 d 下) 的半径至多为 $1/n$. 和定理 76 的证明中一样, 我们对这一表示做适当的变形, 我们得到 E 可以表示为 $\mathcal{F}$ 上的一个 Souslin 系统 (E_s) 的核, 其中对所有的 $s \in S$, E_s 的直径至多为 $1/|s|$. 而这时, 对所有的 $\sigma \in \Sigma$, 交集 $E_\sigma = \cap_n E_{\sigma|n}$ 或者退化为一点, 或者为空集. 在第一种情形中, 我们记 E_σ 中的唯一元素为 $f(\sigma)$. 在第二种情形中, 我们记 $f(\sigma) = x_0$, 其中 x_0 为 E 中任意选取的一个元素. 显然, f 为从 Σ 到 E 的映射. 我们留给读者来证明它的连续性. □

79 **定理** *设 E 为可度量化紧空间中的 Borel 集, 则 E 为 Σ 中的一个闭子空间 P(从而它为波兰空间) 在连续单射下的像.*

证 我们可以假设 E 已嵌入到 $[0,1/2]^{\mathbb{N}}$ 中; 将后者嵌入到 $F = [0,1)^{\mathbb{N}}$ 中, 则问题可以简化为对 F 中的所有 Borel 子集证明定理成立. 我们将利用单调类定理来证明.

设 $A \subset F$. 如果存在 Σ 中的闭集 P 和一个从 P 到 A 的连续单射 f, 那么我们称 $A \in \mathcal{P}$. 我们将证明 $\mathcal{P}$ 具有良好的封闭性质并且它足够大.

a) $\mathcal{P}$ 对于有限交或可数交封闭. 我们考虑可数交的情形: 设 $A_n \in \mathcal{P}$, 即 A_n 为 Σ 中的闭集 P_n 在连续双射 f_n 下的像. 通过对角线映射 $x \mapsto (x, x, \cdots)$, 我们将 F 与 $F^{\mathbb{N}}$ 中的对角线 $\triangle$ 视为同一. 记 φ 为从 $\Sigma^{\mathbb{N}}$ 到 $F^{\mathbb{N}}$ 中的映射 $\prod_n f_n$, P 为 $\Sigma^{\mathbb{N}}$ 中的闭子集 $\varphi^{-1}(F) \cap \prod_n P_n$. 显然 $f = \varphi|_P$ 为从 P 到 $\cap_n A_n \subset F = \triangle$ 的连续双射. 此时, P 为 $\Sigma^{\mathbb{N}}$ 中的闭集, 而不是 Σ 中的子集; 这并不重要, 我们只需注意到 $\Sigma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 从而 $\Sigma^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ 同胚于 Σ, 通过结构变换, P 可以视为 Σ 中的子集.

b) $\mathcal{P}$ 中有限或可数两两不相交元素序列 A_n 的并集属于 $\mathcal{P}$. 我们还是只考虑可数的情形, P_n 和 f_n 的定义同上. 我们即可定义从 P_n 的拓扑和 P[①] 到 $\cup_n A_n$ 上的连续双射 f. 此时 P 为一列 Σ 的拓扑和 $\mathbb{N} \times \Sigma$ 中的闭集. 仿上可证, $\mathbb{N} \times \Sigma$ 同胚于 Σ.

c) 设 $\mathcal{C}$ 为 F 中所有形如 $\prod_n I_n$ 的子集组成的集合, 其中对于所有的 n, I_n 为形如 $[a_n, b_n)$ 的区间, 并且除去有限个 n 外, $I_n = [0,1)$. 注意到 $\mathcal{C}$ 包含 F 且对于有限交运算封闭, 并且 $\mathcal{C}$ 中每个元素的余集可以表示为 $\mathcal{C}$ 中有限个元素的并集. 我们将

[①] 译校者注: 这里的 $P = \{(n, x), x \in P_n\}$.

证明 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$. 由于 $\Sigma^{\mathbb{N}}$ 同胚于 Σ, 从而我们只需证明存在一个从 Σ 到每一个 I_n, 或 $[0,1)$ 的连续双射. 该映射可以取为

$$f(\sigma) = 1 - 2^{-\sigma(1)} - 2^{-[\sigma(1)+\sigma(2)]} - 2^{-[\sigma(1)+\sigma(2)+\sigma(3)]} - \cdots \quad (\sigma \in \Sigma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}).$$

(回顾一下 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots, \}$, 从而所有的 $\sigma(i) > 0$.)

现在我们可以完成证明了. 设 $\mathcal{M}$ 为 F 中满足 A 和 A^c 均属于 $\mathcal{P}$ 的子集 A 的全体. 首先我们证明 $\mathcal{M}$ 对于运算 $(\cup d, \cap d)$ 封闭. 为此只需证明对 $\mathcal{M}$ 中的任意元素列 (A_n), $\cap A_n$ 和 $\cup A_n$ 均属于 $\mathcal{P}$. 由 a) 我们知道交集的情形成立. 注意到 $\cup A_n$ 可以写成两两不相交的集合 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \cap A_1^c, B_3 = A_3 \cap A_1^c \cap A_2^c, \cdots$ 的并集, 由 a), 这些集合均属于 $\mathcal{P}$. 由 b) 我们即得 $\cup A_n \in \mathcal{P}$. 由 c), $\mathcal{M} \supset \mathcal{C}$. 我们注意到 $\mathcal{C}$ 可以生成 Borel σ-代数, 定理得证. □

从拓扑学的观点看, 一个可度量化 Lusin 空间同胚于一个可度量化紧空间中的一个 Borel 子空间. 而从测度论的观点看, 情况要简单得多: 下面的定理归功于 Kuratowski, 我们采用 Christensen [1] 中优雅的证明.

定理 *所有的不可数 Lusin 可测空间都同构 (特别的, 同构于 $[0,1], \Sigma$ 或 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$).* 80

证 设 L 是一个不可数的可度量化 Lusin 空间. 我们把它与集合 $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (它同构于 Cantor 集) 作比较. 由前述构造, 存在从 L 到 C 中一个 Borel 子集的一个可测同构 f, 以及从 C 到 L 中的一个 Borel 子集的一个可测同构 g. 我们采用经典的 V.Bernstein 定理的证法来构造从 L 到 C 的可测同构.

a) 设 (A_n) 为可以生成 L 上 Borel σ-代数的一个可数 Boole 代数. 映射 $f : x \mapsto (I_{A_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ 是从 L 到 C 中的一个子集及其 Borel σ-代数的可测同构 (参见第 I 章第 11 段中的类似结果). 由 Souslin-Lusin 定理 (第 21 段), 像集 $f(L)$ 为 Borel 集, 但是事实上有趣的是我们可以不用涉及解析集理论的第 21 段, 一样也能证明这个结论: 因为 f 是可测同构, 由同构延拓定理 III.18–19, $f(L)$ 为 Borel 集.

b) 对于另一方向, 我们考虑一个波兰空间 P 和从 P 到 L 的一个连续单射 h. 我们来构造一个从 C 到 P 的连续单射 j, 而这就足够了: 因为这样一来, $h \circ j = g$ 就是从紧空间 C 到分离空间 L 的连续单射, 从而 g 为从 C 到 L 中一个紧集的同胚.

我们给出 P 作为完备可分度量空间的结构. 设 M 为 $x \in P$ 组成的集合, 其中 x 的任何一个邻域均为不可数集; M 为闭集且无孤立点, 又因为 P 的拓扑具有可数基, $P \setminus M$ 为可数集, 从而 M 非空. 设 x 和 y 为 M 中的两个不同的点, M_0 和 M_1 为 x 和 y 的不相交的闭邻域并且其直径均不超过 1. 由 M 的定义, 可知 M_0 和 M_1 均不可数. 重复这一过程, 我们构造 M_0 中的两个不相交且直径不超过 1/2 的不可数闭子集 M_{00} 和 M_{01}, 类似的, 构造 M_1 中的 M_{10} 和 M_{11}. 从而对每一个长度为 $|s| = n$ 的有限二进制数 s, 我们可以构造直径不超过 2^{1-n} 的 M_s, 使得

$$s \prec t \Rightarrow M_s \supset M_t; |s| = |t|, s \neq t \Rightarrow M_s \cap M_t = \varnothing.$$

对每一个无限序列 $\sigma \in C$, 定义 $j(\sigma)$ 为 $\cap_n M_{\sigma|n}$ 中唯一的元素, 这样的 j 为连续单射.

c) 为了简化符号, 我们将 C 视为 L 中的一个 (紧) 子集, 从而 g 为从 C 到 L 的典则嵌入, 并且 f 为从 L 到 C 中的一个 Borel 子集上的可测同构. 我们定义

$$A_1 = L \setminus C, A_2 = f(A_1), \cdots, A_{n+1} = f(A_n).$$

$$A = \bigcup_n A_n, B = L \setminus A.$$

当 $x \in A$ 时, $h(x) = f(x)$; 当 $x \in B$ 时, $h(x) = x$.

因为 f 把 L 映到 C 中, A_1 和 A_2 不相交, 我们可以马上验证所有的 A_i 都两两不交, 且 $B \subset C$, $f(A) = C \setminus B$. 另一方面, f 诱导了从 A_i 到 A_{i+1} 的一个同构, 从而 h 诱导了从 A 到 $f(A) = C \setminus B$ 的一个同构, 并且它为 B 到自身的同构, 从而 h 为 L 到 C 上的一个同构. □

一个关于截口的定理

81 这里有一个强于第 44 段 b) 的漂亮的截口定理, 它并未用到 E 上的测度, 并且其证明比较简洁. 下面这段取自 Hoffman-Jørgensen 的书 [1], 事实上它出现的更早 (Jankov, 1941).

回顾一下: Σ 上可以定义一个全序关系 (记为 $\preceq$), 即如下定义的字典序: 设 σ, τ 为 Σ 的元素, 如果 $\sigma = \tau$ 或 $\sigma(n) < \tau(n)$, 其中 n 为满足 $\sigma(i) \neq \tau(i)$ 的最小元素, 那么记 $\sigma \preceq \tau$. Σ 中的任意非空闭子集在这个序关系下存在最小元. 对任意 $\tau \in \Sigma$, 设 $J_\tau = \{\sigma : \sigma \preceq \tau, \sigma \neq \tau\}$; 我们不难验证 J_τ 为开集. 另一方面, Σ 的 Borel σ-代数可以由 J_τ 生成. 设所有的岛 I_s 具有形式 $J_\tau \setminus J_\sigma$, 其中 $\sigma = s_1, s_2, \cdots, s_{k-1}, s_k, 1, 1, 1, \cdots; \tau = s_1, s_2, \cdots, s_{k-1}, s_{k+1}, 1, 1, 1, \cdots$. 设无穷序列 τ_n 的前 k 项与 s 重合, 且后面的所有项均为 n; 记 $L_s = \cup_n J_{\tau_n}$, 它是由全体 J_τ 生成的 σ-代数中的元素. 我们有: $\sigma \in L_s$ 当且仅当对于长度为 k 的序列集合上的字典序, $\sigma|k \leqslant s$, 从而岛 $I_s = L_s \setminus \cup_r L_r$, 其中 r 取遍由 s 严格控制的长度为 k 的序列. 最终, 我们得到所有的岛全体生成 $\mathcal{B}(\Sigma)$.

定理 *设 E 和 Ω 为两个可度量化空间*[①]*, π 为 $E \times \Omega$ 到 Ω 上的投影, A 为 $E \times \Omega$ 中的 Souslin 子集, $B = \pi(A)$. 设 $\mathcal{S}$ 为 Ω 中的 Souslin 子集生成的 σ-代数, 则存在从 Ω 到 E 关于 σ-代数 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{B}(E)$ 可测的映射 h, 使得对所有的 $x \in B$, 我们有 $(h(x), x) \in A$ (h 为 A 的完全截口).*

证 因为 B 为 A 在连续映射下的像, 所以 B 为 Ω 中的 Souslin 集, 从而 $B \in \mathcal{S}$, 而且我们可以将问题简化为 $B = \Omega$ 的情形. 由定理 78, 存在从 Σ 到 $E \times \Omega$ 的连续

①作为一个练习, 读者可以尝试用 "分离" 代替 "可度量化".

映射 f, 使得 $f(\Sigma)=A$. 设 $k=\pi\circ f$, 对所有的 $\omega\in\Omega$, $k^{-1}(\{\omega\})$ 为 Σ 中的非空闭子集; 记该子集中在字典序下的最小元为 $g(\omega)$. 我们容易验证对任意 $\tau\in\Sigma$, 集合 $g^{-1}(J_\tau)$ 等于 $k(J_\tau)$, 即 J_τ 在连续映射下的像, 从而它是一个 Souslin 集. 因此, g 为从 Ω 到 Σ 的一个 $\mathcal{S}$-可测映射. 我们只需取 $h=\pi'\circ f\circ g$ 即可得证, 其中 π' 为从 $E\times\Omega$ 到 E 的投影. □

注 a) 由定理 17, Ω 中的每一个 Souslin 子集都是 $\mathcal{B}(\Omega)$-解析集, 由第 33 段我们知其普遍可测. 这样 $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}_u(\Omega)$ 并且 h 普遍可测. 由第 18 段, 当 Ω 为 Souslin 空间时, 我们有 $\mathcal{B}(\Omega)\subset\mathcal{S}$.

b) 即使在 $E=\Omega=[0,1]$ 且 A 为投影等于 Ω 的 Borel 集时, 定理也不可能改进为: 构造的截口 h 是 Borel 集, 或其图像为 Souslin 集.

定理 81 的抽象形式如下: 这里构造的截口不依赖于 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的测度. 我们把它和定理 44 作比较. 更一般的, 下面的方法可以将许多 "抽象" 的情形简化为 "拓扑" 情形.

定理 *设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 为可测空间, A 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ 中的元素. 设 $\widehat{\mathcal{F}}$ 为 $\mathcal{F}$ 的普遍完备化. 则存在从 Ω 到 $\overline{\mathbb{R}}_+$ 的 $\widehat{\mathcal{F}}$-可测映射 T, 满足如下性质:* 82

a) 对所有满足 $T(\omega)<\infty$ 的 ω, $(T(\omega),\omega)\in A$.

b) 集合 $\{T<\infty\}$ 为 A 在 Ω 上的投影.

证 存在 $\mathcal{F}$ 的一个可分子 σ-代数 $\mathcal{F}'$ 使得 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}'$; 如有必要, 用 $\mathcal{F}'$ 代替 $\mathcal{F}$, 我们可以假设 $\mathcal{F}$ 是可分的. 如有必要, 取商空间, 我们可以假设 $\mathcal{F}$ 的原子为 Ω 中的点. 这样由第 I 章第 11 段, 我们可以将 Ω 视为 $\mathbb{R}$ 中的子集, 其上的 σ-代数为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})|_\Omega$. 由于 A 属于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$, 存在 $A'\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 使得 A 为 A' 在 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上的限制. 对 Lusin 集 A' 应用前面的定理, 我们可以构造定义在 $\mathbb{R}$ 上的 A' 的一个普遍可测截口. 其在 Ω 上的限制 h 在 Ω 上普遍可测 (对 Ω 到 $\mathbb{R}$ 上的嵌入应用第 II 章注 32.b)). 当 ω 属于 A 的投影时, 令 $T(\omega)=h(\omega)$; 对其他情形, 令 $T(\omega)=+\infty$, 我们即可完成证明. □

第二分离定理

正如我们在本附录开头所述, 第二分离定理是我们更进一步研究描述集合论的阶梯. 尽管今天这个定理已有了容易理解的证明 (比如 Roger [1] 中用另外的方式表述出来的非常漂亮的证明, 在 Dellacherie-Meyer [1] 中), 它其实比 "第一" 分离定理 (第 14 段) 要深刻得多. 83

设 $(F,\mathcal{F})$ 为铺砌集, 我们称 F 中的子集 A 为 $\mathcal{F}$-双解析集, 如果 A 和 A^c 属于 $\mathcal{A}(F)$. $\mathcal{F}$-双解析集生成的 σ-代数记为 $\mathcal{BA}(\mathcal{F})$. 通常, 我们有 $\mathcal{F}\subset\mathcal{BA}(\mathcal{F})$, 从而 $\mathcal{BA}(\mathcal{F})$ 包含 $\mathcal{F}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{T}(\mathcal{F})$. 当铺砌 $\mathcal{F}$ 半紧时, 我们可以将第一分离定理 (第 14 段) 分解成两部分:

a) σ-代数 $\mathcal{BA}(\mathcal{F})$ 等于 σ-代数 $\mathcal{T}(\mathcal{F})$.

b) $\mathcal{A}(F)$ 中两个不相交的元素可以被 $\mathcal{BA}(\mathcal{F})$ 中两个不相交的元素所分离.

第二分离定理的下述形式由 Novikov 给出, 它表明在没有紧性的假设下, 上述 b) (甚至一个强得多的结论) 还是成立的.

84 **定理** *假设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{BA}(\mathcal{F})$, (A_n) 为 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 中的一列满足 $\cap_n A_n = \varnothing$ 的元素. 则存在 $\mathcal{BA}(\mathcal{F})$ 中的元素列 (B_n), 使得对每一个 n, B_n 包含 A_n 并且 $\cap_n B_n = \varnothing$.*

对于 (A_n) 递减的情形, 读者可以看出它与定理 14 的不同.

在集合论中, 我们经常做如下的操作: 假设集合 B_n 的并集为 B, 我们将用一列两两不交的集合代替 B_n 使得它们有相同的并集, 例如, $B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2 \cap B_1^c$, $B'_3 = B_3 \cap B_1^c \cap B_2^c, \cdots$. 另一个形式的第二分离定理称为 Kuratowski 约化定理. 事实上, 它与第 83 段[①] 等价, 它说明在 $\mathcal{F}$-解析集的余集组成的集类 $\mathcal{CA}(\mathcal{F})$ 中, 这样的 "约化" 是可行的.

85 **定理** *假设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{BA}(\mathcal{F})$, (B_n) 为 $\mathcal{CA}(\mathcal{F})$ 中的元素列. 则存在 $\mathcal{CA}(\mathcal{F})$ 中的两两不交元素列 (B'_n) 使得对每一个 n, B'_n 包含于 B_n 中并且 $\cup_n B'_n = \cup_n B_n$.*

自然的, B'_n 不再由定理前面的变换给出, 因为它可能不属于集类 $\mathcal{CA}(\mathcal{F})$.

关于第二分离定理以及它的应用, 读者可以参考 Dellacherie [2][②].

[①] 译校者注: 此处原文为定理 84, 依上下文改为第 83 段.

[②] 英文版中还有如下两段:

这些命题的抽象表述看上去很一般, 但其实不然: 真正有意思的情况还是可度量化可分空间. 对于可度量化紧空间, 我们从第一分离定理知道, 双解析集就是 Borel 集, 而 Novikov 定理很令人惊奇 (例如考虑一个递减集列 (A_n)). 绝大多数的应用都是关于紧空间的, 其中有一些应用非常简单而漂亮 (参见 Dellacherie [2]).

我们曾数次提及, 解析集和容度理论属于描述集合论的 "第一层次", 而第二分离定理已经在 "第二层次" 上了. Dellacherie 在 [2] 中猜测, 紧形式的 Novikov 定理 (把 "Borel" 换成 "双解析") 仍然是在第一层次上的. 而 Mokobodzki 的确成功地给出了这一猜想的一个 "初等" 证明 (G. Mokobodzki, Démonstration élémentaire d'un théorème de Novikov. Séminaire de Probabilité de Strasbourg, vol. X, 1976, 第 539–543 页), 然后 Dellacherie 又把它简化了 (同卷, 第 580 页). 另有一个蕴含紧形式的 Novikov 定理的命题, 也有一个 "第一层次" 的证明, 由 Saint-Pierre 给出 (未发表).

第 IV 章附录

这里我们给出关于随机集的两个附加的结果. 前一个定理涉及具有不可数截口(且概率非零)的随机集. 第二个定理确定几乎所有的截口都为可数集的随机集的结构. 这里的证明是新的, 至少我们相信如此, 且证明中仅用到第 III 章及其附录中关于解析集的 "初等" 理论. 不同的证明可参见 Dellacherie [1], 第六章, 那里的证明依赖于本书中并未出现的 "二分容度".

我们采用如下记号: $(\Omega, \mathcal{F}^\circ, \mathbb{P})$ 为概率空间, $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}^\circ$ 在 $\mathbb{P}$ 下的完备 σ-代数. 在某些结果中, 我们将给定 Ω 上的一个满足通常条件的递增的 $\mathcal{F}$ 子 σ-代数族 $(\mathcal{F}_t)$.

具有不可数截口的集合

首先我们复习一下. 109

在第 III 章附录中 (定理 80), 我们证明了每个不可数的 Lusin 可测空间 L 都同构于区间 $[0,1]$, 从而它可以支撑一个扩散测度. 如果读者想回避这个结果, 那么它可以用一种更简洁的方式叙述: 注意到 L 同构于波兰空间 P (第 III 章定理 79) 并且 P 包含同胚于 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 中的紧子集 (第 III 章定理 80.b)), 而 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 也可以支撑一个扩散测度 (例如 "掷硬币游戏" 的测度). 从而同样的结论对 L 亦成立. 另一方面, 我们有如下引理:

引理 *设 $\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上的概率测度组成的集合, 带有弱收敛拓扑. 则由扩散测度组成的集合 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{P}$ 中的 Borel 集.* 110

证 设 $\mu \in \mathcal{P}$, $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$ 为其分布函数, 则 $\mu \in \mathcal{D}$ 这一性质可以表示为:

对所有的 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得对每一对 $[0,n]$ 中满足 $r \leqslant s \leqslant r + \dfrac{1}{m}$ 的有

理数 (r,s), 我们有 $\mu([r,s]) < \dfrac{1}{n}$.

这一条件是必要 (当 μ 为扩散测度时, F_μ 在 $[0,n]$ 上一致连续) 且充分的 (设 $x \in \mathbb{R}_+$, 取 $r \leqslant x$ 和 $s \geqslant x$, 我们得到 $\mu\{x\} = 0$). 注意到 $\mu \mapsto \mu([r,s])$ 为 $\mathcal{P}$ 上的 Borel 函数, 即可完成证明. □

111 **定理** 设 H 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ$ 中的随机集[①].

a) 集合 $c(H) = \{\omega : H(\omega)\text{不可数}\}$ 为 $\mathcal{F}^\circ$-解析集. 特别的, 它属于 $\mathcal{F}$[②].

b) 存在 Ω 到 $\mathcal{D} \cup \{0\}$ 上的 $\mathcal{F}^\circ$-可测映射 $\omega \mapsto \mu_\omega$ 满足下列性质:

– 对所有的 ω, μ_ω 支撑在 $H(\omega)$ 上.

– $\mathbb{P}\{\omega : \mu_\omega \neq 0\} = \mathbb{P}(c(H))$.

证 从 H 为矩形集的情形出发, 利用单调类定理, 我们马上可以证明 $\mathcal{P} \times \Omega$ 上的映射 $(\mu,\omega) \mapsto \mu(H(\omega))$ 可测. 从而集合 $L = \{(\mu,\omega) : \mu \in \mathcal{D}\ 且\ \mu(H(\omega)) = 1\}$ 为 $\mathcal{D} \times \Omega$ 中的可测子集. 另一方面, 由第 III 章第 60 段, $\mathcal{P}$ 为波兰空间并且由定理 110, $\mathcal{D}$ 为 Lusin 空间: 利用第 III 章注 20 (或第 III 章定理 80), Lusin 可测空间 $\mathcal{D}$ 可视为 $\mathbb{R}_+$ 中的一个 Borel 子集, 从而 L 可视为 $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ 中的一个可测子集. 最后, 由第 109 段, $H(\omega)$ 不可数当且仅当 $H(\omega)$ 支撑一个扩散测度, 即 ω 属于 L 的投影. 利用第 III 章定理 13 我们可以证明 a). 利用截口定理 (第 III 章第 44 和 45 段) 我们可以证明 b), 其中零测度 "0" 在这里起到的作用即为加入 $\mathcal{D}$ 中的一个点. □

112 **注** a) 利用截口定理 (第 III 章定理 84) 代替第 III 章第 45 段, 我们可以构造从 Ω 到 $\mathcal{D} \cup \{0\}$ 的映射 $\omega \mapsto \mu_\omega$, 使得它关于 $\mathcal{F}^\circ$ 的普遍完备化 σ-代数 $\widehat{\mathcal{F}}$ 可测, 且 $\{\omega : \mu_\omega \neq 0\}$ 等于 $c(H)$.

b) Ω 上的函数

$$C_H = \inf\{t : H(\omega) \cap [0,t]\text{不可数}\}$$

称为 <u>H 中的渗透时</u>. 由上述定理我们易得 C_H 是 $\mathcal{F}$-可测的. 当 H 为循序集时, C_H 为停时.

c) 我们在 $\mathbb{R}_+$ 上定义一种拓扑, 在这几段中称之为<u>凝聚拓扑</u>, 具体定义如下: 点 x 为 $E \subset \mathbb{R}_+$ 中的聚点, 如果 $x \in E$, 或 x 为 E 的凝聚点, 即 x 在 $\mathbb{R}_+$ 中的每一个通常邻域内均包含 E 中不可数个点. 对应的极限概念用 $\limsup_{y \to x}\text{-cd}\ f(y)$ 之类的记号表示, 我们留给读者来猜想包括形如 $\limsup_{y \downarrow x}\text{-cd}$ 和 $\limsup_{y \to x, y \neq x}\text{-cd}$ 这样的记号的含义 (同时验证拓扑的各条公理). 这里我们感兴趣的是, 对任意循序 (相应的, 可测) 过程 (X_t), 过程

$$\tilde{X}_t(\omega) = \limsup_{s \to t, s \neq t}\text{-cd}\ X_s(\omega), \tag{112.1}$$

[①] 与往常一样, 我们记 $H(\omega) = \{t : (t,\omega) \in H\}$.

[②] 这是 Mazurkiewicz–Sierpinski 定理的特殊情形. 原定理更一般: 若 H 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}^\circ$-解析集, 则 $c(H)$ 为 $\mathcal{F}^\circ$-解析集.

以及类似的其他极限形式的过程仍为循序 (相应的, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-可测) 过程. 更精确地说, 这里的结果类似于定理 89 和定理 90, 证明也相似: 设 X 为集合 H 的示性函数, 考虑由 $A_t(\omega) = \sup\{s < t : s$ 为 $H(\omega)$ 的凝聚点 $\}$ 定义的过程 $(A_t)_{t>0}$, 用渗透时代替首达时可以完成证明.

当 (X_t) 为一个随机闭集 A 的示性函数时, $(\tilde{X}_t)$ 为 (关于完备 σ-代数 $\mathcal{F}$ 的) 随机闭集 $\tilde{A}$ 的示性函数. 对所有的 ω, 截口 $\tilde{A}(\omega)$ 为 $A(\omega)$ 中的凝聚点的全体, 即 $A(\omega)$ 中最大的完满集, 称之为 $A(\omega)$ 的完满核. 众所周知, 对所有的 ω, 集合 $A(\omega) \setminus \tilde{A}(\omega)$ 为可数集 (Cantor-Bendixson 定理). 我们通常称随机集 $\tilde{A}$ 为 A 的完满核.

d) 我们将在第 VI 章看到, 当 H 为可选集或可料集时, 定理 111 中的集类 $\omega \mapsto \mu_\omega$ 也相应地具有可选性或可料性.

定理 111 可以进一步改进.

定理 *设 H 为随机闭集, 则我们可以假设 b) 中的映射 $\omega \mapsto \mu_\omega$ 满足如下性质:* 113

对几乎所有的 $w \in \Omega$, μ_ω 的支撑就是 $H(\omega)$ 的完满核 $\tilde{H}(\omega)$.

证 我们将所有满足 $r < s$ 的非负有理数对 (r, s) 排列为序列 (r_n, s_n); 对所有的 n, 设 $H_n = H \cap]\!]r_n, s_n[\![$. 我们构造关于 H_n 满足定理 111.b) 的映射 $\omega \mapsto \mu_\omega^n$, 并且令 $\lambda_\omega = \sum_n 2^{-n}\mu_\omega^n$. 对每个 ω, λ_ω 为一个全测度小于等于 1 且支撑在 $H(\omega)$ 上的非负扩散测度, 从而其亦支撑在完满核 $\tilde{H}(\omega)$ 上. 对几乎所有的 ω, 以及任意满足 $I \cap H(\omega)$ 为不可数集 (即与 $\tilde{H}(\omega)$ 相交) 的开区间 I, $\lambda_\omega(I)$ 不为零. 从而 λ_ω 的支撑即为 $\tilde{H}_\omega$. 为构造所求的映射, 我们只需在 $\lambda_\omega \neq 0$ 时取 $\mu_\omega = \lambda_\omega / ||\lambda_\omega||$, 当 $\lambda_\omega = 0$ 时取 $\mu_\omega = 0$ 即可. □

注 正如注 112.a) 中所述, 我们可以构造一个 $\widehat{\mathcal{F}}$ (而不再是 $\mathcal{F}^\circ$)-可测的映射 $\omega \mapsto \mu_\omega$, 使得对所有的 ω, μ_ω 的支撑为 $\tilde{H}(\omega)$.

随机集的导集

我们已经证明, 当 H 为随机闭集时, $H \setminus \tilde{H}$ 为具有可数截口的随机集. 在这几段中我们将证明它与可数个图像的并集不可区别. 更一般的, 由于 $H \setminus \tilde{H}$ 的截口为 $\mathbb{R}_+$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 我们将证明对所有具有可数截口的 "随机 $\mathcal{G}_\delta$ 集", 上述结论仍成立.

首先我们回顾一个经典的定义, 并且给出关于随机集的一个简单引理.

定义 *设 F 为 $\mathbb{R}_+$ 中的子集, F 的导集*[①] *为 F 中不是 F 的孤立点的那些点的全体, 记为 F'. 对任意可数序数 α, F 的 α 阶导集递归定义如下:* 114

$$F^\circ = F, \quad F^{\alpha+1} = (F^\alpha)',$$
$$\text{对任意极限序数 } \beta, \ F^\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} F^\alpha. \tag{114.1}$$

①如果要回到经典的定义, 我们得说"F 在 F 中的导集".

当 H 为 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中的子集时, 我们记 H' 和 H^α 为 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中对所有的 ω, 截口为 $H(\omega)'$ 和 $H(\omega)^\alpha$ 的子集.

115 **定理** 若 H 属于 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$ (相应的, H 为循序集), 则对任意可数序数 α, H^α 为 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F})$-可测 (相应的, 循序) 的随机集, 并且 $H\setminus H^\alpha$ 为可数个 $\mathcal{F}$-可测函数 (相应的, 停时) 的图像的并集.

证 我们只需讨论 H' 的情形. 为简单起见, 我们设 H 为循序集. 对任意有理数 r, 设 $T^r(\omega)=\inf\{t>r: t\geqslant 0\text{且}(t,\omega)\in H\}$, $H(\omega)$ 中的孤立点均在某个 $T^r(\omega)$ 中; $T^r(\omega)$ 为孤立点当且仅当

$$(T^r(\omega),\omega)\in H; r<T^r(\omega);\ \text{存在 } \varepsilon>0,\ \text{使得 } H'(\omega)\cap[T^r(\omega),T^r(\omega)+\varepsilon)=\varnothing.$$

设 $A(r)$ 为满足这些性质的 ω 组成的集合. 我们不难验证 $A(r)$ 属于 $\mathcal{F}_{T^r}$, 并且 $H\setminus H'$ 为停时 $T^r_{A(r)}$ 的图像的并集 (定理 53). 从而我们推出 H' 为循序集. □

下面的定理中我们省略循序集的情形.

116 **定理** a) 设 H 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$-可测集, 则存在可数序数 α, 使得 H^α 与 $H^{\alpha+1}$ 不可区别.

b) 设 H 的截口均为 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 则 (关于上述序数 α 的) 截口 $H^\alpha(\omega)$ 几乎必然为空集或不可数集. 特别的, 当 H 的截口为可数的 $\mathcal{G}_\delta$ 集时, 对几乎所有的 ω, $H^\alpha(\omega)$ 都是空集, 并且 H 与一列 $\mathcal{F}$-可测函数的图像的并集不可区别.

证 对任意有理数 r, 设 $T^\alpha_r(\omega)=\inf\{t>r:(t,\omega)\in H^\alpha\}$. 因为当 α 递增时, H^α 递减, 从而 T^α_r 递增, 对 $\mathbb{E}[\exp(-T^\alpha_r)]$ 应用第 0 章第 8 段, 我们即得存在可数序数 α 使得 $T^\alpha_r=T^{\alpha+1}_r$ 几乎必然成立. 由于仅有可数个有理数, 从而存在 α, 使得上式对所有的有理数 r 均成立. 我们考虑使得 $T^\alpha_r(\omega)=T^{\alpha+1}_r(\omega)$ 对所有有理数 r 成立的某个 ω; 则 $H^\alpha(\omega)$ 没有孤立点: 若不然, 设 s 为孤立点, 则存在一个以有理数为端点且包含 s 的区间 (u,v), 与 $H^{\alpha+1}(\omega)$ 不相交, 这样我们会有 $T^\alpha_u(\omega)\leqslant s, T^{\alpha+1}_u(\omega)\geqslant v$, 这与假设矛盾. 从而 $H^\alpha(\omega)=H^{\alpha+1}(\omega)$.

若截口 $H(\omega)$ 为 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 前面我们已经证明了 $H(\omega)\setminus H^\alpha(\omega)$ 是一个可数集 D, 从而 $H^\alpha(\omega)=H(\omega)\cap D^c$ 为 $\mathcal{G}_\delta$ 集. 我们取 ω 使得 $H^\alpha(\omega)=H^{\alpha+1}(\omega)$, 即它没有孤立点且非空; 则 $H^\alpha(\omega)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 中的非空 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 从而它为 Baire 空间, 并且它不可数 (因为每个可数的 Baire 空间至少包含一个孤立点).

当截口 $H(\omega)$ 为可数的 $\mathcal{G}_\delta$ 集时, $H^\alpha(\omega)$ 几乎必然为空集, 从而 H 与 $H\setminus H^\alpha$ 不可区别. 由定理 115, $H\setminus H^\alpha$ 为可数个图像的并集. □

注 a) 在定理的最后一个结论中, $\mathcal{F}$-可测随机变量当然可以换为 $\mathcal{F}^\circ$-可测随机变量.

b) 特别的, 对具有闭截口的集合应用这个定理, 我们有, 存在序数 α 使得 H^α 与 H 的完满核 $\tilde{H}$ 不可区别, 并且 $H \setminus \tilde{H}$ 与可数个图像的并集不可区别.

具有可数截口的集合

定理 设 H 为具有可数截口的 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-可测 (相应的, 可选, 可料) 集, 则 H 与可数个 $\mathcal{F}$-可测函数 (相应的, 可选, 可料时) 的图像的并集不可区别. 117

证 利用第 IV 章第 88 段, 我们可以证明可选和可料的情形 (只需要 σ-代数流满足通常条件即可). 从而我们可以忽略 σ-代数流. 利用关于截口均为 $\mathcal{G}_\delta$ 集的定理 116 和下面的引理 (只需要 σ-代数 $\mathcal{F}$ 是完备的), 即可完成定理的证明.

引理 设 H 为 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$-可测集, 则存在一个所有截口都为 $\mathcal{G}_\delta$ 集的 $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$-可测集 K, 以及从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的 Borel 映射 h, 使得 $(t,\omega) \mapsto (h(t),\omega)$ 诱导了 K 到 H 上的一个双射.

事实上, 由定理 116, K 与一列随机变量 T_n 的图像的并集不可区别, 从而 H 与随机变量列 $h \circ T_n$ 的图像的并集不可区别.

引理的证明: 由于存在 $\mathcal{F}$ 的可分子 σ-代数 $\mathcal{G}$ 使得 $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{G}$, 不失一般性, 我们可以假设 $\mathcal{F}$-可分. 如有必要, 以 $\mathcal{F}$ 对应的等价关系取商, 我们还可以假设 $\mathcal{F}$ 的原子为 Ω 中的点. 这样 $(\Omega,\mathcal{F})$ 可视为 $[0,1]$ 中的子集及其 Borel σ-代数 (第 I 章第 11 段). 最后, 由于 $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 中的每个 Borel 集都是 $[0,1] \times \mathbb{R}_+$ 中的某个 Borel 集的限制, 我们可以简化为在 $\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ 的条件下证明引理.

集合 H 为 Lusin 集, 从而存在 $\Sigma = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 中的闭集 F 和从 F 到 H 上的连续双射 (附录, 第 III 章定理 79), 记为 $\sigma \mapsto (h_1(\sigma), h_2(\sigma))$, 其中 h_1 和 h_2 分别取值于 $\mathbb{R}_+$ 和 Ω. 注意到将 F 视为 $I \subset \mathbb{R}_+$ 中的闭子集时, Σ 同胚于 $[0,1]$ 中的无理数集合 I[①], 设

$$K = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : t \in F, h_2(t) = \omega\} \quad (h_2 \text{ 的图像}).$$

设 h 为 F 上的映射 h_1 在 $\mathbb{R}_+$ 上的 Borel 延拓, 则映射 $(t,\omega) \mapsto (h(t),\omega)$ 为 Borel 映射, 并且诱导出从 K 到 H 上的一个双射. 另一方面, 由于 h_2 连续, 所以对所有的 ω, 截口 $K(\omega)$ 为 F 中的闭集, 从而也是 I 中的闭集. 因为 I 为 $\mathbb{R}_+$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 所以 $K(\omega)$ 亦为 $\mathcal{G}_\delta$ 集. □

注 I 和 $\Sigma = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 之间的传统同胚由无理数的连分数展开给出. 这里有一种不借助连分数展开的方法. 对每个序列 $\sigma = (n_1, n_2, n_3, \cdots) \in \Sigma$, 我们定义 $f(\sigma) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, 其中它的二进制展开中先为 n_1 个 "0", 然后为 n_2 个 "1", 再是 n_3 个 "0", n_4 个 "1", 等等. 因为所有的 $n_i > 0$, 如上定义的函数 f 为 Σ 和 J 之间的双射, 其中 J 为二 118

①参见随后的注 118.

进制有理数的集合在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中的余集. 从而我们容易验证 f 为从 Σ 到 J 上的同胚. 由于 J 为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中的 $\mathcal{G}_\delta$ 集, 在上述证明中读者只需用 J 代替 I 即可.

注释

第 0 章

这一章的本意是引入各种符号, 不过我们还是加入了关于超限归纳法的一节. 这是一种非常直观且让人舒服的方法, 但是并没有包含在法国数学家所受到的传统教育之中. 有一种广泛传播的观点, 认为它已经“被超越”了, 并且可以用 Zorn 引理来代替, 这是错误的, 因为在这里介绍的超限归纳法是针对“小基数”的, 而 Zorn 引理用起来是和基数无关的.

关于连续统假设, 本章的最后一句话可能有点太武断了. 看上去在本书中提到的连续统假设的推论都可以用集合论里其他的公理推出来, 它们也都是和连续统假设的否命题相容的.

第 I 章

本章的内容完全是经典的. 和第一版相比, 我们去掉了和不可度量化的紧空间相关的内容, 并且增加了经典但是并不广为人知的一件事情, 就是可分的分离可测空间可以嵌入到 [0,1] 之中去. 我们也把单调类定理的表述放松了一些.

第 II 章

这一章也完全是经典的. 不加证明给出的那些结果在讨论测度论的书里面都可以找到. 和第一版相比, 我们删除了关于 Radon 测度的很短的一节, 增加了 Vitali-Hahn-Saks 定理, Dunford-Pettis 紧性判别准则的逆命题 (即: 由弱紧性可以推出一

致可积性), 以及关于快滤子的 Mokobodzki 定理 (在后面某章中我们还将讲述关于"内侧极限 (limites médiales)"的类似定理). 最后, 我们在第 39 段 b) 中引进了非经典的广义条件期望的概念. 所有这些都不是凭空加进来的, 而是因为我们在 Markov 过程理论中或是在鞅论中的确看到它们派上了用场.

第 III 章

对于概率论学者来说, 解析集和容度理论的最根本的应用是首达时的可测性 (第 44 段). 有鉴于此, 本章的第一句话, 把建立首达时的可测性与位势理论的解析工具的关联归功于 Hunt, 并不是很确切: 其实在 Doob 关于布朗运动的第一篇奠基性论文 (Doob[4]) 中, 我们第一次看到关于一个 Borel 可测集的首达时的可测性的证明, 不是通过 (那时候还不存在的) 容度理论, 而是用 Cartan 在经典位势论中的结果. Doob 和 Hunt 不仅证明了首达时的可测性, 他们还都证明了可以"从外部"比较首达时, 为此他们将 Choquet 定理的威力发挥到极致 (而 Blackwell[①]指出, 首达时的可测性定理只要求所有的解析集都是普遍可测的, 而这一点在 Choquet 以前很早就知道了: 参见 Saks[1]).

同样, 第 IV 章中的截口定理只用到第 44 段 b), 我们在附录中给出了不用容度概念的证明. 读者要是由此认定"容度是可有可无的"那就错了: Choquet 定理处于概率论的核心位置, 我们最好还是搞懂它, 而不是在一个个特殊情况去搞懂那些能够让我们避免使用这个定理的技巧.

关于解析集理论本身, 在第一版的基础上我们大幅度增加了内容. 我们更为着重介绍了 Blackwell 定理这个非常简单但同时非常强有力的结果, 它是发现新结果的一个重要的工具 (哪怕在发现新结果之后, 我们能找到一个更加"初等" 的证明). 我们系统地引进了 Lusin 可测空间等概念, 这样做部分是受到严加安 (Yen[1]) 的影响, 我们放弃了一种更加"拓扑"的写法. 最后, 我们特别想指出, 我们希望这里给出的简单证明能够打消大家对于 Souslin-Lusin 的精彩定理的恐惧, 很多人都说这个定理很"深刻" (意思是说"没用"), 而且直到最近, 所有的证明都是相当复杂的 (比如说 Bourbaki[3]).

本书的第一版包含了若干小节在一种抽象框架里讨论"正则测度". 在这一版里面只剩下一点痕迹了: 半紧铺砌的概念, 而且它是以某种注记的方式引进的, 一点用处都没有. 这是因为自那时起, Prokhorov[1] 中诞生的非局部紧空间上的 Radon 测度的概念, 经过 Le Cam, Varadarajan, Parthasarathy 等人出于概率 (甚至统计) 研究的目的发展的, 和一个来自 Gelfand[1], 并由 Minlos, Schwartz, Fernique 等人发展的拓扑向量空间上的测度概念, 已经融为一体, 且已经发展成熟了. 我们受 Bourbaki

① 在一个没有发表的报告中, 那也是最早对于任意可测过程讨论这类问题的地方, 这也是"过程的一般理论"的起点. 但是我们手头仅有的一份那个报告的拷贝找不到了.

的著作 [5] 启发, 并以可容化方法作为主线贯穿始终. 关于这一点, 读者可以把我们关于一个波兰空间上的测度的正则性定理的证明 (定理 37) 和 Prokhorov[1] 漂亮的原始证明作比较.

这并不是说抽象的正则测度理论 (Pfanzagl-Pierlo 的小书 [1] 是这方面很好的一本参考书) 就永无出头之日了.

关于"标准"空间, 就是 Bourbaki 意义下的 Lusin 空间, 以及它们在随机广义函数理论中的应用, Fernique [1] 是一本好的参考书. 正如我们在正文中所说的那样, 这里的灵感来自于 Cartier [1] 的一个注记.

据我们所知, 双测度的概念只在 Kingman [1] 中有所讨论, Morando [1] 从那里借用到他自己关于随机测度的工作 [1] 中. 正文中的定理是 Morando 根据 Cartier 的一个口头提示证明的.

我们再来看基本补充参考资料. 解析集的理论重新引起人们的兴趣① 反映在最近出版的关于这一课题的专著上: 我们推荐 Hoffman-Jørgensen [1], Christensen [1]. 在后一本书中读者可以找到本书中没有涉及的关于波兰空间中闭集的集合上的可测结构 (Effros 结构) 的研究. 这两本书, 和本书一样, 都处在解析集理论的第一层次上 (参见第 III 章附录). 如果想了解更高级的理论, 可以参考 Dellacherie 的一篇综述性的文章 [2] (该文有一部分是根据 Rogers [1] 改写的), 概率论学者也可以参考 Dellacherie-Meyer [1]. 我们从来没有达到过逻辑学家达到的高度, 在 Moschovakis 即将出版的著作中会讨论这方面的工作②.

关于容度理论, 读者们首先应当阅读整个理论的源泉: 首先是 Choquet 的大作 [1], 直到今天, 这仍然是一个思想的宝库; 然后是 Sion 那些精彩的文章, 我们的表述方式很大程度上取材于此 (也正是 Sion 指出, 比如说, 分离定理其实是一个可容性的结果); 最后是那些给出容度在"古典"分析中应用的著作: Brelot [1] 和 [2], Helms [1], Carleson [1], 我们也期待着描述古典位势理论和布朗运动相关联的那些方面的有关著作如期出版. 最后, 对于那些有机会接触到下述文献的读者, 我们大力推荐巴黎大学的讨论班的合集 (Brelot-Choquet-Deny (位势理论) 讨论班和 Choquet (分析引论) 讨论班), 由于经费困难, 庞加莱研究所已经不再发行 (可能甚至不再编辑) 这种合集了. 我们甚至不知道最近四年的报告是否结集成册③.

---

①这种重新产生的兴趣也反映在对于一些非常一般的拓扑空间中定义解析集的各种不同的尝试上面. 这些工作和概率论工作者没什么关系, 所以我们也就没有尝试去了解相关研究.

②译校者注: 即 Moschovakis, Yiannis N., *Descriptive Set Theory*, 第一版, North-Holland (1980), 第二版, AMS (2009).

③译校者注: 有兴趣的读者可以在 www.numdam.org 上找到 Brelot-Choquet-Deny (位势理论) 讨论班 1957 年至 1972 年的合集, Choquet (分析引论) 讨论班 1962 年至 1977 年的合集.

第 IV 章

本章完全重新组织过了. 我们压缩了关于可分离性的讨论的篇幅 (但是并没有将其完全删掉, 因为这个概念还是重要的, 我们只是删掉了一个毫无道理的关于"抽象"的附录, 以及所有关于"第二典则过程"的内容), 还根据多年以来的实践积累增加不少有用的东西: 典则空间的可测性质, 本质拓扑, 等等. 新版中的第 IV 章还包括了关于"过程的一般理论"的讨论, 这样就把第一版中散见于第 VII 和 VIII 章的一些概念整合到了一起.

人们经常指责过程的"一般"理论过于抽象, 但却不说清楚这里"抽象"一词到底是什么意思, 因为所有的数学都是抽象的. 如果他们指的是"学起来很累人"乃至"烦人", 那我们同意, 但是我们不接受过程理论仅仅是"按照法国口味"发展出来的一套无用的理论的说法. 它并不是作为一个独立的分支发展的, 而是始终和鞅论以及 Markov 过程理论紧密联系在一起的, 它是一套工具, 让我们可以实现 Lévy, Doob, Itô, 钟开莱, Hunt 等人的构想, 多年以来钟开莱甚至有这样一个口号"看看这些样本函数". 举几个例子: 递增的 σ-代数族和停时的概念是在鞅论中产生的 (Doob, 1940 年左右), 和随机博弈, 也就是概率计算的源头, 联系在一起. 把所有来自于"强 Markov 性"的常数时的性质推广到停时的想法第一次出现在 1942 年 Doob 研究一个关于 Markov 链的问题的时候, 然后有许多人都对此加以研究, 包括 Hunt, Blumenthal 和苏联的 Dynkin 学派 (这一学派在循序过程和停时方面为我们提供了很多有用的结果), 等等. "具有生存时"的过程的想法, 在和消灭算子一起成为一个"一般性的"工具之前, 就已经以 Markov 链或者爆炸扩散的形式存在了 (加上一个虚拟状态的想法来自于 Doob[2]). 可料或者可发布停时的概念最早出现在 1962 年 Meyer 关于 Markov 过程的博士论文当中 (而且那里的证明是错的), 而绝不可及停时的概念隐含在 Hunt 和 Blumenthal 非常重要的 Markov 过程的左拟连续性质当中. 良好可测 (可选) σ-代数和相应的截口定理出现在 1963 年的一个讨论班报告 (Meyer[4]) 中, 那里的证明也是错的①. 在 Catherine Doléans 的工作中人们看到了研究可料 σ-代数的意义: [1] 是根据 Cartier 的一个想法来寻找上鞅分解定理的一个新证明, [2] 是关于随机微积分这个我们将在后面某章讨论的极为"具体"的分支, 说它具体是因为连工程师们都经常使用它. 最后, 形如 $\mathcal{F}_{T-}$ 的 σ-代数是由钟开莱和 Doob [1] 引进的, 而它们和可料性之间的联系则是在钟开莱 1967 至 1968 年访问斯特拉斯堡期间被发现的, 他也为这套理论最后定型做出了贡献, 并且通过从 Markov 链理论那里引进一些问题和例子来激发人们对这一理论的兴趣.

使用上穿和下穿次数的想法来自于鞅论 (Doob [1], 第 315–316 页). 同样, 在函数的振荡很小的区间上使用超限归纳推理的原型是 Doob 关于热方程的文章 [5]. 使

①截口定理的第一个简单 (且正确) 的证明属于 Cornea-Licea[1], 后来被 Dellacherie 简化 (参见 Meyer [3]).

用本性拓扑源于 Markov 过程中的时间逆转 (钟开莱和 Walsh [1], Doob [6], Walsh [1]; 在 Walsh [2] 中可以看到一个特别漂亮的应用).

在研究过程的时候避免使用瞬时观测值, 而代之以平均的观点起源于随机分布的研究. 这里的叙述方法源自很久之前和 Cartier 的一次谈话. Itô发展了 (并在斯特拉斯堡讲了一次) 一个类似的观点, 稍微更偏向轨道的正则性一些 ([1], [2]). 最后, 我们最近了解到 Knight 的一项重要工作 [1], 将这个理论推广到"典则"等价型的构造以外.

第 3 节的内容和它之前的讨论同样问题的著作 (本书第一版, Dellacherie [1] 或者 Meyer [5]) 有重要的区别: 以前人们经常放弃"通常条件", 付出的代价是增加一些技术上的困难. 这里的处理并不是随心所欲的结果, 而是因为我们看到了这种方法的用处: Azéma 关于时间逆转的工作, Föllmer 关于拟鞅的工作, 等等.

本书中讲述的过程理论, 一方面缺少"投影定理", 这将在后面的某章里作为鞅论的应用讲述, 另一方面还缺少可选时与可料时的右连续或左连续的判别法则, 这也将在后面的章节中给出. 目前读者可以参考 Mertens [1], 或者 Dellacherie [1], 第 101 页.

索引

符号索引

参考文献

J. AZEMA. [1] Théorie générale des processus et retournement du temps. Annales E.N.S., (6): 459–519, 1973.

D. BLACKWELL. [1] On a class of probability spaces. Proc. 3rd Berkeley Symposium, University of Calif. Press, Berkeley, (2): 1–6, 1956.

D. BLACKWELL and L.E. DUBINS. [1] A converse to the dominated convergence theorem. Ill. J. Math., (7): 508–514, 1963.

N. BOURBAKI. [1] Eléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques, chap. IV,. 2me édition Act. Sci. et Industr. 1229, Hermann, Paris, 1964.

N. BOURBAKI. [2] Eléments de Mathématique. Topologie générale, chap.I–IV. Edition définitive. Hermann, Paris, 1971.

N. BOURBAKI. [3] Eléments de Mathématique. Topologie générale, chap. IX, 2me édition. Act. Sci. et Industr. 1045, Hermann, Paris, 1958.

N. BOURBAKI. [4] Eléments de mathématique. Intégration, chap. III, 2me édition. Act. Sci. et Industr. 1175, Hermann, Paris, 1965.

N. BOURBAKI. [5] Eléments de mathématique. Intégration, chap. IX. Act. Sci. et Industr. 1343, Hermann, Paris, 1969.

M. BRELOT. [1] Eléments de la théorie classique du potentiel, 3me édition. Centre de Documentation Universitaire, Paris, 1965.

M. BRELOT. [2] Lectures on Potential theory. Number 19. Tata Institute of Fund. Research, Bombay, 1960.

L. CARLESON. [1] Selected problems on exceptional sets. Van Nostrand, New–York, 1967.

P. CARTIER. [1] Processus aléatoires généralisés. Séminaire Bourbaki, 16me année, 1963–64, exposé 272.

G. CHOQUET. [1] Theory of capacities. Annales Inst. Fourier, Grenoble, (5): 131–295, 1953–54.

G. CHOQUET. [2] Forme abstraite du théorème de capacitabilité. Annales Inst. Fourier, Grenoble, (9): 83–89, 1959.

G. CHOQUET. [3] Ensembles K-analytiques et K-sousliniens. cas général et cas métrique. Annales Inst. Fourier, Grenoble, (9), 1959.

C.S. CHOU and P.A. MEYER. [1] Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in M. Springer, Berlin, 1975.

J.P.R. CHRISTENSEN. [1] Topology and Borel strutures, North Holland Mathematic Studies. Number 10. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1974.

K.L. CHUNG (钟开莱). [1] A course in probability theory. Harcourt, Brace and World, 1968.

K.L. CHUNG (钟开莱). [2] On the fundamental hypotheses of Hunt processes. Instituto di alta matematica, Symposia Mathematica vol. IX, 43–52, 1972.

K.L. CHUNG (钟开莱) and J.L. DOOB. [1] Fields, optionality and measurability. Amer. J. Math., (87): 397–424, 1964.

K.L. CHUNG (钟开莱) and J.B. WALSH. [1] To reverse a Markov process. Acta Math., (123): 225–251, 1969.

A. CORNEA and G. LICEA. [1] Une démonstration unifiée des théorèmes de section de P.A.Meyer. Z.f.W-thorie, (10): 198–202, 1968.

Ph. COURREGE and P. PRIOURET. [1] Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, (14): 245–274, 1965.

C. DELLACHERIE. [1] Capacités et processus stochastiques. Number 67. Ergebn. der M., Springer, Berlin, 1972.

C. DELLACHERIE. [2] Ensembles analytique: théorèmes de séparation et applications. A paraître dans Séminaire de Probabilités IX. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1975.

C. DELLACHERIE. [3] Les théorèmes de Mazurkiewicz-Sierpinski et Lusin. Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in M. 191, Springer, Berlin, 1971.

C. DELLACHERIE. [4] Ensembles analytiques, capacités et mesures de Hausdorff. Lecture Notes in M. 295, Springer, Berlin, 1972.

C. DELLACHERIE. [5] Un ensemble progressivement mesurable ··· Séminaire de Probabilités VIII, p. 22–24. Lecture Notes in M. 381, Springer, Berlin, 1974.

C. DELLACHERIE. [6] Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités VII, p. 38–47. Lecture Notes in M. 321, Springer, Berlin, 1973.

C. DELLACHERIE and P.A. MEYER. [1] Ensembles analytiques et temps d'arrêt. Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in M.,Springer, Berlin, 1975.

C. DELLACHERIE and P.A. MEYER. [2] Un nouveau théorème de section et de projection. Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in M.,Springer, Berlin, 1975.

C. DOLEANS-DADE. [1] Processus croissants naturels et processus croissants très-bien measurables. C.R.A.S., 264, 1967.

C. DOLEANS-DADE. [2] Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D). Z.f. W-theorie, (9): 309–314, 1969.

J.L. DOOB. [1] Stochastic processes. J.Wiley & Sons, New–York; Chapman & Hall, London, 1953.

J.L. DOOB. [2] Brownian motion on a Green space. Theory of Prob. and its appl., (2): 1–33, 1957.

J.L. DOOB. [3] Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set. Bull. Amer. M. Soc., (72): 579–600, 1966.

J.L. DOOB. [4] Semimartingales and subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc., (77): 86–121, 1954.

J.L. DOOB. [5] A probability approach to the heat equation. Trans. Amer. Math. Soc., (80): 216–280, 1955.

J.L. DOOB. [6] Separability and measurable processes. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo. Section 1A, (17): 297–304, 1970.

N. DUNFORD and J.T. SCHWARTZ. [1] Linear operators: Part I,General Theory. Interscience Publishers, New–York, 1963.

E.B. DYNKIN. [1] Markov processes. Grundlehren der Math. Wiss. 121, Springer, Berlin, 1965 (俄文原版, 1962).

X. FERNIQUE. [1] Processus linéaires, processus généralisés. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1(17): 1–92, 1967.

A.R. GALMARINO. [1] Representation of an isotropic diffusion as a skew product. Z.f.W-theorie, (1): 359–378, 1963.

I.M. GELFAND. [1] Processus aléatoires généralisés. Dokl. Akad. Nauk SSSR, (100): 853–856, 1955.

Fr. HAUSDORFF. [1] Mengenlehre (3me édition), Veit,Berlin, 1935. 英译本: Set theory, Chelsea Publ. Co, New–York, 1962.

L.L. HELMS. [1] Introduction to potential theory. John Wiley & Sons, New–York, 1963.

J. HOFFMANN-JØRGENSEN. [1] The theory of analytic sets. Number 10. Aarhus Univ. various publication series, 1970.

G.A. HUNT. [1] Markoff processes and potentials 1. Illinois J. of Math, (1): 44–93, 1957.

K. ITO. [1] The canonical modification of stochastic processes. J. M. Soc. Japan, (20): 130–150, 1968.
K. ITO. [2] Canonical measurable random functions. Proc. Int. Conf. on Funct. analysis, Univ. of Tokyo Press, p. 369–377, 1970.

K. ITO and H.P. Mc KEAN. [1] Diffusion processes and their sample paths. Grundlehren der Math. Wiss. 125, Springer, Berlin, 1965.

J.F.C. KINGMAN. [1] Completely random measures. Pacific J. of M., (21): 59–78, 1967.

F. KNIGHT. [1] A predictive view of continuous time processes. Ann. of Prob., 1975.

F. KNIGHT. [2] Existence of small oscillations at zeros of brownian motion. Séminaire de Probabilités VIII, Lecture Notes in M. 381, Springer, p. 134–149, 1974.

C. KURATOWSKI. [1] Topologie I, 4me édition. Polska Akad.Nauk,Warszawa, 1958.

L. LE CAM. [1] Convergence in distribution of stochastic processes. Number 11. Univ. Calif. Publ. in Statistics, Berkeley, 1957.

P. LEVY. [1] Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthire-Villars, Pairs, 1948.

N. LUSIN. [1] Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

B. MAISONNEUVE. [1] Topologies du type de Skorokhod. Séminaire de Probabilitiés VI, Lecture Notes in M. 258, Springer, Berlin, p. 113–117, 1972.

J.F. MERTENS. [1] Théories des processus stochastiques généraux, applications aux surmartingales. Z.f.W-theorie, (22): 45–68, 1972.

P.A. MEYER. [1] Limites médiales d'après Mokobodzki. Séminaire de Probabilités VII, Lecture Notes in M. 321, Springer, Berilin, p. 198–204, 1973.

P.A. MEYER. [2] Temps d'arrêt algébriquement prévisibles. Séminaire de Probabilités VI. Lecture Notes in M. 258, Springer, Berlin, 1972.

P.A. MEYER. [3] Une nouvelle démonstration des théorèmes de section. Séminaire de Probabilités III, Lecture Notes in M. 88, Springer, Berlin, p. 155–159, 1969.

P.A. MEYER. [4] Une présentation de la théorie des ensembles sousliniens. Applications aux processus stochastiques. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (théorie du potentiel), 7me année, 1962-63, 17pages.

P.A. MEYER. [5] Guide détaillé de la théorie "générale" des processus. Séminiaire de probabilités II, Lecture Notes in M. 51, Springer, Berlin, p. 140–165, 1968.

G. MOKOBODZKI. [1] Ultrafiltres rapides sur N. Séminaire Brelot-Choquet-Deny, théorie du potentiel, 12me année,, Number 12, 22pages (Institue Henri Poincaré, Paris), 1967-68.

G. MOKOBODZKI. [2] Limites médiales: Séminaire Choquet.

Ph. MORANDO. [1] Mesures aléatoires. Séminaire de probabilités III, Lecture Notes in M. 88, Springer, Berlin, p. 190–229, 1969.

J. NEVEU. [1] Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson,Paris, 1964.

K.R. PARTHASARATHY. [1] Probability measures on metric spaces. Academic Press, New-York, 1967.

J. PFANZAGL and W. PIERLO. [1] Compact systems of sets. Lecture Notes in M. Number 16, Springer,Berin, 1966.

D. PREISS. [1] Metric spaces in which Prokhorov's theorem is not valid. Z.f.W-theories, (27): *109–116, 1973.*

Yu.V. PROKHOROV. [1] Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. Th. Prob. and its Appl. (1): 157–214, 1956.

C.A. ROGERS. [1] Lusin's second theorem of separation. J. London M. Soc., (6): 491–503, 1973.

S. SAKS. [1] Theory of the integral, translated by L.C.Young, 2me édition,. Hafner publ. Co., New-York, 1937.

M. SION. [1] On capacitability and measurability. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, (13): 88–99, 1963.

M SION. [2] On analytic sets in topological spaces. Trans. Amer. M. Soc., (96): 341–354, 1960.

M. SION. [3] Topological and measure theoretic properties of analytic sets. Proc. Amer. M. Soc., (11): 769–776, 1960.

M. SION. [4] On uniformization of sets in topological spaces. Trans. Amer. M. Soc., (96): 237–246, 1960.

M. SION. [5] *Continous images of Borel sets. Proc. Amer. M. Soc., (12): 385–391, 1961.*

M. SION and D.W. BRESSLER. [1] The current theory of analytic sets. Can. J. of M., (16): 207–230, 1964.

V. STRASSEN. [1] The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Stat., (36): 88–91, 1965.

D. STROOCK. [1] The Kac approach to potential theory. J. Math. Mech., (16): 829–852, 1967.

J.B. WALSH. [1] Some topologies connected with Lebesgue measure. Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in M. 191, Springer, Berlin, p. 290–310, 1971.

J.B. WALSH. [2] The perfection of multiplicative funtionals. Séminaire de Probabilités VI, Lecture Notes in M. 258, Springer, Berlin, p. 233–252, 1972.

K.A. YEN (严加安). [1] Forme mesurable de la théorie des ensembles sousliniens, applications à la théorie de la mesure. Scientia Sinica, 1975.

译校者的话

本书是随机分析领域中的经典著作. 中译本由山东大学博士生李欣鹏同学译出初稿, 并得到王法磊、殷玥、任丽颖等同学的帮助. 应出版社之邀, 由姚一隽比照原文, 对初稿做了仔细修订. 完成之后由许明宇进行校对. 这样一本名著的翻译由我们几个无名小卒来完成, 实在是机缘巧合, 也有点迫不得已、赶鸭子上架的味道. 总之既然接了这个活儿, 当然要尽力把这件事情做好的.

翻译、校对这样一本书, 实在是一项挑战, 因为原书是书写工整、用词精准、语句通顺的典范, 要让译文能够反映出这些品质来谈何容易. 以我们目前的学术、语言水平和教学科研条件, 也只能做到这个地步了, 离"信、达、雅"毫无疑问还差得很远. 译文中的错漏, 望方家不吝赐教, 可以在以后的版本中修正 (原书每出一卷, 就会把前面几卷中发现的错误加以订正, 这种认真的态度非常值得我们学习).

我们真心地希望, 中国概率学界的领导人们能够组织有水平有责任心的学者, 完成余下几卷中译的工作, 相信这样一项工作, 即便做上十年, 也是值得的. 我国数学界的前辈们曾经在翻译外国的书籍方面花过很大的工夫. 平心而论, 老一辈数学家从日、俄、德、法、英各国语言翻译过来的数学书籍对中国数学事业的发展起到过很重要的积极作用.

我国的数学事业, 从上个世纪二三十年代开始, 在姜、陈、熊、苏、江、华[1] 诸

[1]姜立夫 (1890 年 7 月 4 日—1978 年 2 月 3 日), 谱名培瑜, 学名蒋佐, 字立夫, 以字行, 浙江平阳人. 陈建功 (1893 年 9 月 8 日—1971 年 4 月 11 日), 字业成, 浙江绍兴人. 熊庆来 (1893 年 10 月 20 日—1969 年 2 月 3 日), 字迪之, 云南弥勒人. 苏步青 (1902 年 9 月 23 日—2003 年 3 月 17 日), 字云亭, 原名尚龙 (讹作尚良), 浙江平阳人. 江泽涵 (1902 年 10 月 6 日—1994 年 3 月 29 日), 安徽旌德人. 华罗庚 (1910 年11 月12 日—1985 年 6 月 12 日), 江苏金坛人. 中国自有现代数学研究起, 直至 80 年代中后期的发展, 这几位先生的领导之功, 殊不可没.

先生的领导与指引下，能够踏踏实实一步一步地走到今天，殊为不易. 在今天，我们应当坚持住，不要做好高骛远、拔苗助长的事情，打好基础。希望本书的出版能够为中国学生学习现代随机过程的知识贡献一份力量.

感谢 Dellacherie 教授专门为中文版撰写序言，感谢法国科学院 Marc Yor 院士授权我们翻译他撰写的 Paul-André Meyer 先生的生平. 感谢 Paul-André Meyer 先生的家人授权我们使用 Meyer 教授的照片.

在翻译、校对的过程中，我们始终受到李大潜、严加安两位先生的鼓励和支持，在此致谢. 我们也广泛地借鉴了严加安先生的《测度论讲义》以及《鞅与随机积分引论》中所确定的术语。感谢复旦大学应坚刚教授帮助我们翻译几个困难的名词.

感谢复旦大学、中科院应用数学研究所和北医三院 (有相当部分的工作是我们在病房里完成的) 为我们提供了良好的工作环境. 感谢韩劲松、张坤、许艳丽、王一婷诸位医师的高尚医德和高超医术.

许明宇　于京城中关村

姚一隽　于沪上五角场

2011 年 9 月

附录: “我们所有人的榜样” Paul-André Meyer 生平[1]

§1 生平概述

Paul-André Meyer (1934 年 8 月 21 日 — 2003 年 1 月 30 日), 1934 年 8 月 21 日生于巴黎郊外的 Boulogne-Billancourt. 1954 年他进入巴黎高等师范学校 (简称巴黎高师), 在那里做学生[2]直到 1958 年. 在 Jacques Deny 的指导下他完成了博士论文, 然后成为斯特拉斯堡大学的教授 (1964 年至 1970 年). 1970 年之后, 他担任法国国家科研中心 (CNRS) 的主任研究员 (Directeur de Recherche). 1978 年他当选法国科学院通讯院士. 1994 年, 他彻底地离开了科研活动.

基本上从 1962 年至 1992 年, Meyer 发表的工作一直处于概率论, 特别是随机过程理论的前沿.

下面, 我将试图以不是很技术性的方式介绍 Paul-André Meyer 的主要成果, 同时我也将简单描述他这个令人崇敬的人. 毫无疑问, 他当得起 Alain Connes 给 Laurent

[1]译校者注: 这是法国科学院 Marc Yor 院士在 Meyer 教授去世以后写的悼念文章, 原文是法语, 后来翻译成英语发表在 Springer 出版社 Lecture Notes in Mathematics 系列第 1874 卷《In Memoriam Paul-André Meyer》(概率论讨论班第 XXXIX 卷) 中. 这段文字根据英文版译出.

[2]译校者注: 巴黎高师的学制比较特别, 做那里的学生 (即在那里注册) 和在那里听课读书是两件事情.

Schwartz 的评语: "我们所有人的榜样"[①].

§2 Paul-André Meyer 的工作的开端

为了理解 Paul-André Meyer 的工作的开端, 考察 1957 年法国概率论研究的状况是有用的, 那个时候他正要开始他在巴黎高师的第四年学习. 下面的文字引自 G. Choquet 的一篇文章: "Paul Lévy, 这位在法国以外被认为是现代概率论的开创者之一的人, 在法国却不为人知. 法国, 这个从 Pascal 时代开始就是概率论摇篮的国度, 却发现她的著名理论概率论学者 (Borel, Fréchet, Lévy, $\cdots$) 的谱系有后继无人之虞. 于是意识到这种危险的巴黎的数学家们把 P. Lévy 从前的学生 M. Loève 从伯克利请到巴黎来一年, 希望他通过开一门课和组织一个讨论班, 能够播下一些好的种子 $\cdots\cdots$.

这一年下来, Meyer 很好地掌握了概率论的技术, 并可以开始他自己的研究了: 就在那时, G. Hunt 在美国发表了两篇奠基性的论文, 在一个很一般的框架下建立了一类重要的 Markov 过程和法国概率论工作者那时正在研究的位势论中的一类核函数的明确的联系, 从而同时使位势论和概率论得到新生. Meyer 那时和这些位势论学者关系很密切, 而且对于凸泛函分析懂得很多, 这使得他研究 Hunt 的理论很是得心应手.

1961 年, 他在 Jacques Deny 的指导下完成了关于 Markov 过程的可乘与可加泛函的博士论文, 这让他立即成为概率论和位势论这两方面的顶尖学者."

§3 博士后阶段 (1961—1966)

(3.1) 在完成了博士论文之后, Meyer 在 1962—1963 年间完成了几篇概率论方面的奠基性的论文, 一方面表现出他在技术方面的天才, 另一方面也表现出他对于上鞅 (即描述"不公平游戏"的随机过程) 的深刻理解. 更确切地说, 在这些文章里面 Meyer 证明了 Doob 关于离散时间的结果的一个深刻的推广: 任何 (D) 类的上鞅都可以分解成一个鞅和一个可料增过程的差.

(3.2) 1966 年, Meyer 出版了《概率与位势》一书. 该书第一次以一种严谨的体系和易懂的方式把他直到那时为止的工作做了一番总结和评价. 全书分为三部分:

A. 概率运算基础

B. 鞅论

C. 位势理论的分析工具

---

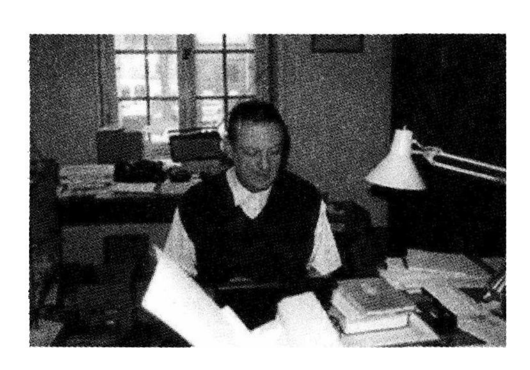
①译校者注: Laurent Schwartz (1915—2002), 法国数学家, 分布 (广义函数) 理论的创始人, 1950 年的菲尔兹奖得主, 法国巴黎理工大学教授, 法国科学院院士. 他去世之后, Alain Connes (1947—, 法国数学家, 1983 年菲尔兹奖得主, 法国科学院院士) 作为当时法国科学院数学组的负责人, 写了一篇悼念文章, 在法国数学会会刊《Gazette des Mathématiciens》上发表.

这本书有着巨大的影响, 而且立即被翻译成了英文 (Blaisdell, 1966). 在差不多从 1967 年至 1975 年这段时间里, 它是无数概率论工作者在他们研究的开始阶段的标准参考读物. 特别对于我和我这一辈概率论工作者来说, 这本书为我们打开了研究生阶段学习之门, 也对我们准备法国中学教师资格证书很有帮助.

Meyer, 在他的学术生涯中反复回到这本书的内容上来, 坚持不懈地为之添砖加瓦; 不夸张地说, 这就是他的工作的基石.

§4 概率讨论班的最初十五年

Paul-André Mayer 不仅是概率理论、位势理论等多方面的大师, 而且他有自己的长远眼光来构建一套易懂好学的知识体系, 即在讨论班系列文集上集中发表他自己、他的学生以及合作者等等的文章. 这里他采用的是 Brelot-Choquet-Deny 讨论班刊行油印本的传统.



这就是"概率论讨论班"的起源, 它被纳入 Springer 的数学丛书系列, 从 1967 年开始每年出版一本, 每本从 200 页至 500 页不等. 在每一本讨论班文集里, Meyer 都系统地阐述了当时概率论领域在国际范围的主要进展.

这是一项浩大的工程, Meyer 将他全部的精力和热情投入其中, 同时有 C. Dellacherie 和 M. Weil 来帮助他. 他经常给出比原始工作条理更清晰的陈述, 他推广了许多人的工作, 从连续情形到不连续情形, 从可积情形到不可积情形 …… 于是讨论班系列成为了所有对随机过程感兴趣的科研工作者的不可或缺的参考. 事实上, Meyer 坚持讨论班系列的这个特征, 他经常把它和全科医生的《工作手册》相比, 其中的内容会随着医学的发展而被替换. 在每一卷中, Meyer 都会给出代表这个领域的最新发展的文章的一些看法、改进和修正.

要把讨论班系列文集中, Meyer 给出过高明观点、做出过本质性贡献的基本结果列一张清单出来, 将会是非常长的. 经过艰难的选择, 我给出下面一些:

- 在讨论班文集第 I 卷 (1967) 中, 有关于随机积分的 4 篇系列文章, 这些文章透彻地研究可加泛函空间 —— 一般 Markov 过程的鞅理论. 这些是在 1967 年

Kunita-Watanabe 的原始文章基础上完成的.

- 在讨论班文集第 II 卷 (1968) 中, 有随机过程的一般理论的详细介绍, 这一理论的研究以 Dellacherie 的书《容度和随机过程》在 1972 年出版而达到高潮.
- 在讨论班文集第 III 卷 (1969) 中, 鞅论中的 Burkholder 不等式.
- 在讨论班文集第 IV 卷 (1970) 中, Stroock-Varadhan 鞅问题的形式的讨论, 这里包含了一个很强大而漂亮的方法, 即给定一个 (预) 生成元如何构造相应的 Markov 过程, 以全新的方式完善了最初 Itô 利用随机微分方程的解从轨道的观点来构造扩散过程的想法.
- 在讨论班文集第 V 卷 (1971) 中, 有一个非常美妙的 Itô 游弋理论的表述, 它不久前刚刚出现在 Berkeley 会议文集 (1970) 中. 同时还有一个 Knight 关于正交鞅的定理的简单证明 (Meyer 在 Oberwolfach 研究所正好听了 Knight 的报告). 我需要指出的是 Meyer 对由钟开莱和 Walsh 得到的关于 Markov 过程的时间逆转的表述. 实际上, Meyer 多次讨论过这一课题 (时间逆转), 从 Nagasawa 原始的结果 (1964) 开始, 然后到讨论班文集第 VIII 卷中讨论的 Azéma 的理论 (1972), 最后是 Kuznetsov 的结果 (后面将提到).
- 在讨论班文集第 VI 卷 (1972) 中, Meyer 给出了与上鞅关联的 Follmer 测度的表述 (原始工作也在同一年发表), 这样, 这些过程 (上鞅) 的下降趋势就可以有一个全局度量. 在这一本讨论班文集里还有对鞅的 Burkholder-Davis-Gundy 不等式的新 (参见讨论班文集第 III 卷) 讨论. 几年后, 这些不等式在半鞅的 L^p 估计中起了关键作用.
- 在讨论班文集第 VII 卷 (1973) 中, 令人吃惊地包含了 Meyer 的 11 篇文章, 这些文章涵盖了很多不同方面, 其中有: Markov 过程的外科手术 (surgery) 技巧, Azéma 关于过程的一般理论的工作. 有一篇文章《关于信息流的问题》后来变得非常有名. 在这篇文章中, Meyer 吃惊地发现他发展的概率论理论可以应用到实际问题里! 而后面发生的事情 (下面能看到) 能够让他更惊奇!
- 在讨论班文集第 VIII 卷 (1974) 中, 除了一篇关于时间逆转的文章, 我们还可以找到一篇和 Maisonneuve 合作的关于齐次 Markov 随机集的长文.
- 同样, 在讨论班文集第 IX 卷 (1975) 中, Paul-André Meyer 的贡献是非常重要的, 简要地说, 有 15 篇文章, 有独立写出的, 与人合作的, 或者手把手地教别人写出来的 …… 这里, 人们可以找到过程的一般理论的一些补充, 过程流的理论的研究 (7 篇), 时间逆转的研究, 可料性的研究, 以及对于 A. Garsia 的关于离散时间鞅 (的不等式) 的精彩的书的讨论. 后来, 人们意识到 Meyer 在为他在下一部讨论班文集中将会出现的烟火表演般精彩的内容准备弹药 …….
- 讨论班文集第 X 卷在 1976 年出版, 里面有一篇 Meyer 写的《随机积分教程》(150 页), 它从讨论班的内容和 Meyer 的创造性来看都是一个 “大爆炸”. 这个阶段大概是 Paul-André Meyer 的研究生涯的最奇妙的阶段, 这时期他多年的努力和

坚持最终开花结果. 具体来讲, 有基于过程的一般理论, 及 Meyer, Dellacherie 和 C. Doléans 在讨论班中发表的许多文章, Meyer 现在可以发展出一般半鞅的随机积分理论. 这个教程的一个重要结果是和一般半鞅关联的局部时的存在性和一个相应的 Tanaka 公式的推导.

毫不夸张地说这个《随机积分教程》是全球概率学界 30 年研究结果的总结, 是随机积分理论最一般和最有效的论述. 这个理论最初于 1944 年由 Itô 在布朗运动的情形下建立, 但他的结果直到 1969 年才通过 McKean 的精彩而又简明的书《随机积分》被日本之外的概率学者所了解. 但该书仅讨论了扩散过程 (即连续轨道的 Markov 过程).

《随机积分教程》的内容丰富是公认的, 之后几年, 由它引出令人瞩目的一大批结果和文章的发表, 粗略地说从 1976 年至 1980 年：

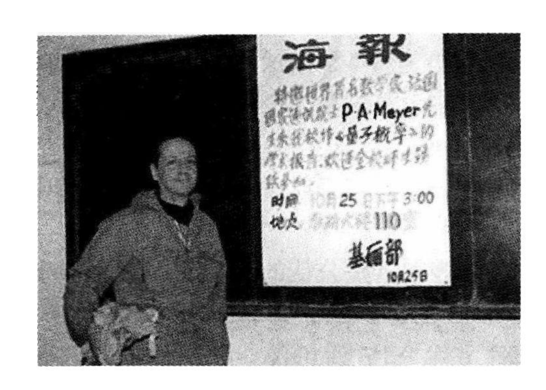
- 从讨论班文集第 XI 卷至 XIV 卷包含了许多《随机积分教程》的补充, 全新一代的法国概率学者 (Émery, Jacod, Jeulin, Lenglart, Lépingle, Stricker ⋯) 和其他国家的概率学者 (Pratelli, 严加安, Yoeurp) 领会了《随机积分教程》里发展的技巧的精髓, 将概率、信息流等推广到一般框架. 局部时成为随机过程理论研究的一个重要的元素：一段时间以后, J.F. Le Gall 应用这些结果相当显著地简化了日本学派的随机微分方程的精细的结果: 紧接着, 平面上的布朗运动的轨道交点的局部时得到了系统的发展, 这是为了研究它的多重交点的情形 (参见 Le Gall 的 St-Flour 讲义 (1990) LNM1527).
- 《随机积分教程》的内容的丰富性同样体现在之后几年随机微积分的专著 (带有或没有应用的部分) 的发表. 在这些书中最早的几本之一里, 当时加州大学洛杉矶分校的 Durrett 教授写道, 他只不过是将阿尔萨斯语言[①]翻译为英文而已 ⋯⋯.

经历了所有这些发展之后, 在 1979 年底, Meyer 邀请 J.Azéma 和我本人来主持讨论班文集第 XIV 卷之后的编辑工作, 我们接受了这个任务, 同时强烈感到 Meyer 赋予我们一个巨大的荣耀, 而我们受之有愧, 不过, 这可能的确促进了 Meyer 深入研究 (这时正全面开花结果的) 随机微分几何理论, 这一领域里还有 J.M. Bismut, D. Elworthy, P. Malliavin 和 L. Schwartz 的实质的贡献.

为了容纳 Meyer 在讨论班文集第 XV 卷中用极端清晰的方式叙述的这一领域的大量新结果, 我们必须出版一卷增刊 (这本讨论班文集超过了 500 页, 这要感谢 Springer 出版社). 在这些文章中, 我必须要提到这篇非常美妙的综述性文章《无痛苦的随机几何》, 它之前在 Durham 国际会议上被报告过, 那是国际概率学界的一个重要的时刻.

[①]译校者注: 斯特拉斯堡是法国阿尔萨斯地区的首府.

§5 C.Dellacherie 和 Paul-André Meyer 的五卷本巨著:《概率与位势》(1975—1992, 第五卷还有 B. Maisonneuve 参与)



(5.1) Paul-André Meyer 的工作讲到这里, 差不多是时候暂时将概率讨论班放一放, 来讲讲由 Hermann 出版社在 1975 年至 1992 年间陆续出版的煌煌五卷本大著《概率与位势》, 讲一讲写作这样一部书是多么庞大的一项工程.

(5.2) 说这套书是 Paul-André Meyer 在 1966 年出版的同名著作的全新版本 (参见上面的第 3 节), 那只能给出这里所包含的丰富知识的一个非常模糊的印象. 实际上, 它是 Dellacherie 和 Meyer 乃至所有以这样或者那样的方式和“斯特拉斯堡概率学派”相关联的所有概率论学者群体的工作的集大成之作. 这个群体既是虚拟的 (在互联网出现之前), 也是“实在”的!

(5.3) 现在我来逐章逐卷地介绍这部书的内容:

- 第 I 卷: (第 I 至 IV 章). 1975 年出版. 在这一卷里, 作者们介绍了整本书的基础知识: 开头的两章包含了完整的积分理论及概率论工作者所需要的各种变体. 第 III 章介绍了解析集和 Choquet 容度的理论, 这是截口定理不可或缺的工具; 而后者在过程的一般理论中起着核心作用. 第 IV 章是随机过程的一个介绍: 它们的 σ-代数流、停时、可选、可料、循序的随机过程 …….
- 第 II 卷: (第 V 至 VIII 章). 鞅论; 1980 年出版. 这一卷里给出了鞅论的一个详尽的叙述. 先讲离散的情形 (第 V 章), 再讲连续时间的情形 (第 VI 章), 过程的一般理论的全部手段, 包括“直接”投影和对偶投影, 在这里都发挥了作用. 上鞅和半鞅的分解定理在第 VII 章中讲述, 那里还有半鞅的 H^p 空间的研究, 和 $H^1 - BMO$ 对偶. 最后, 在第 VIII 章中发展了随机积分理论. 除了一般的 Itô-Tanaka 公式, 这一章还包括了 Dellacherie 和 Bichteler (根据 Métivier 和 Pellaumail 的开创性工作发展起来) 的把半鞅作为取值在 L^0 中的“好积分算子”的刻画. 泛函分析 (取值在 L^0 中的向量值测度; Maurey 和 Nikishin 的工作) 的全部威力都用上了 …… 只有像 Meyer 这样有天赋的人才能够对这个时期令人惊叹的发展如此了如指掌. 尽管在本卷序言中已经明确表示, 因为这一理论

发展太过迅速, 这里的叙述并非最后定型的, 但是二十多年过去了, 它还是一本关于鞅论的体系非常严谨且跟得上时代的著作. 相关的讨论最后由第 V 卷补充完整.

- 第 III 卷: (第 IX,X,XI 章). 离散位势理论; 1983 年出版. 这一卷包含三章, 给出了位势论的初步介绍: 更具体地说, 在第 IX 章中介绍了关于一个离散时间半群的位势论 (归结为关于单个核函数的讨论); 第 X 章介绍了 Dubins 和 Savage 在"赌场"框架下的约化 (réduite) 概念, 他们自己的那本精彩的书《非赌不可的时候该怎么做》实在是不为人知; 这一章还包含了一些漂亮的应用, 比起 1966 年那本书里的内容要深刻多了 (Bernstein 和 Bochner 的定理, 等等). 最后, 在第 XI 章中我们可以看到容度理论的新方法, 以及它们在赌场中的应用.
- 第 IV 卷: (第 XII 至 XVI 章). 和一个预解式关联的位势论; Markov 过程论; 1987 年出版. 这里的副标题很好地指出了本卷其实可以分成两个部分: 第一部分 (第 XII 和 XIII 章) 研究的是次 Markov 预解式的概念, 一直讨论到过分函数用极端过分函数来表示的定理; 第二部分讨论 Markov 过程的理论, 在这里使用的是 Feller 过程的形式, 用它就足以来叙述 Ray 过程了. 除了关于这个论题不可避免的一般讨论以外, 我们还可以注意到第 XV 章中包含了关于和一个闭随机集相关联的局部时的深刻讨论, 特别是这里包含了 Itô的游弋理论, 以及它在布朗运动的研究中的一些应用. 最后, 第 XVI 章表明最广泛的一类 Markov 过程, 即所谓"右过程", 可以化归为 Ray 过程. 我还想指出在这一卷中包含一个关于"场的平方"算子的深刻讨论, 这个概念是 H. Kunita (1969 年) 最早提出来的, 后来又被 J. P. Roth 在他关于位势论的博士论文 (1976 年) 中重新发现; 这个概念在推导 Bakry-Émery 的对数 Sobolev 不等式中起到了重要作用. 这一卷还叙述了 Markov 过程的 Lévy 系统理论, 它已经由 Meyer 在讨论班文集第 I 卷中仔细研究过了 (见前文).
- 第 V 卷: (第 XVII 至 XXIV 章). Markov 过程 (完); 随机计算的补充. 这最后的第五卷以第 XVII 章开始, 这里作者们把关于所谓"右过程" 的一些重要的补充知识收集在一起, 这些过程构成了最"好" 的一类 Markov 过程, 其定义是随着 Meyer 关于 Markov 过程研究的发展一点点呈现出来的. 这一章的第二部分是关于过分 (excessive) 测度的. 从整体上说这一章和 Sharpe (1988 年) 关于 Markov 过程的专著以及 Getoor (1990 年) 关于过分测度的专著从体系上是一脉相承的.

第 XVIII 章深入讨论了 Markov 过程的时间逆转这个重要的课题: 这个操作的困难性在于, 如果在一个确定的时间逆转一个 Markov 过程的话, 逆转后得到的过程将不再是时间齐次的; 另一方面, 当我们在一个"回转时间"逆转的话, 那么时间齐次性仍然能够得到保持. 为讨论这个结果, 作者们叙述了所有必要的定义和技巧, 这其中有许多是从 Azéma 在 1972—1973 年间的工作里借用

来的.

第 XIX 章讨论带有随机生灭的 Markov 过程理论, 这一理论的高潮是 Kuznetsov 的工作, 特别是以他的名字命名的测度. 这之后的第二节是关于流的理论以及 Palm 测度的. 这一章的最后给出了 Markov 过程的最终离开分解 (last exit decomposition) 的几个应用.

第 XX 章给出了和随机集相关联的 σ-代数流以及鞅的完全定型的讨论, 这部分是从 Azéma 关于随机闭集的工作而来的. 这一章也包含了 σ-代数流的扩张理论的一个精彩的描述, 这是一套相当自然, 但是“法国概率学派”坚持不懈却仍然没能够成功输出的理论 …….

第 XXI 章是关于混沌分解的各种例子的. 在概率论讨论班第 XXIII 卷中, Émery 有一个了不起的发现: Azéma 的鞅具有混沌分解性质, 这样就使得这个鞅成为了最重要的 Markov 过程之一, 几乎和布朗运动以及 Poisson 过程具有相同的地位. 在那以后, 混沌分解就被深入研究. 这一章还包括了 Wiener 空间上的分析, 换句话说就是所谓 Malliavin 分析的一个漂亮的介绍, 其叙述方式和 D. Williams 在前面提到过 1980 年 Durham 会议文集 (Springer LNM 851) 里面发表的《To Begin at the beginning》比较接近.

在第 XXII 章里, 作者们仔细讨论了 Meyer 关于 Littlewood-Paley 不等式和 Riesz 变换的工作. Meyer 为推广 Burkholder-Gundy-Silverstein 的工作做出了极大的贡献, 为此, 他一方面对调和函数做纯分析的研究, 另一方面研究布朗型问题, 且/或研究关于一些从布朗运动的从属化 (subordination) 得来的 Lévy 过程.

第 XXIII 章是关于斯特拉斯堡讨论班内或者在其周围发展的鞅不等式的另一个教学性叙述 (概率论讨论班文集第 XIV 卷中 Lenglart-Lépingle-Pratelli 有一个很好的报告). 在这一章里我们也可以看到关于下鞅的乘法表示的一个深刻讨论, 这是 Meyer 非常喜欢的一个课题, 是从 Itô, Watanabe, Kunita 等人的早期工作那里继承下来的. 作者们还在一个一般的框架中研究了随机微分方程.

最后, 第 XXIV 章中以一种概率论工作者可以用的方式讨论描述集合论中的深入结论, 从而结束全书.

(5.4) 总结一下, 这部著作是 Paul-André Meyer 自从 1966 年他的书出版之后的数学工作的完美总结, 并且把被第 V 卷的三位作者称为宝藏的 1992 年前出版的 25 卷概率论讨论班讲义中的精华娓娓道来. 很遗憾, 第 V 卷流传得并不广泛; 我犹豫是不是要给个解释 (不过, 或许 ……).

(5.5) 关于这套巨著的简述不应该妨碍我们注意到 Paul-André Meyer 还写了几本高质量的讲义 (Springer 出版社的 LNM 系列):

- LNM 26: *Markov processes* (1967)
- LNM 77: *Markov processes: Martin's boundary* (1968)

- LNM 284: *Martingales and Stochastic Integrals I* (1972)
- LNM 307: *Presentation of Markov processes* (1973) (这是 1971 年法国 Saint-Flour 暑期学校讲义中的一篇)

当然我们还不应该忘记精彩的

- LNM 1538: *Quantum Probability for Probabilists* (1993)

尽管 Springer 出版社和许多读者坚持要求, 他始终不肯将其以书的形式出版.

§6 重回到概率论讨论班

(6.1) 提到 Meyer 的量子概率的讲义, 我们自然回到 Meyer 对概率论讨论班系列文集的贡献 (前面我们没有讲讨论班文集第 XVI 卷 (1980) 及其以后各卷的情况). 他在这方面的研究可以分成两个“时期”. 第一个是从 1980 年至 1991 年, 第二个是在 1992 年和 1994 年之间, 后一时期 Meyer 发表的文章不多.

(6.2) 讲到第一个时期 (1982—1991), 人们首先会想到 Meyer 的几篇关于 Nelson 的随机力学的文章 (讨论班 XVIII 卷 (1984)), 这是 Nelson 的著名的普林斯顿讲义《布朗运动的动态理论》(1967) 的一次重生. 这些讨论班文集里的文章是 Meyer 和郑伟安合写的, 并经常被后人引用. 但是, 这个时期里 Meyer 的主要贡献是他的系列文章《量子概率基础》(讨论班文集第 XX 卷 (1986): 第一章至第五章, 讨论班文集第 XXI 卷 (1987): 第六章到第八章, 讨论班文集第 XXII 卷 (1988): 第九章和第十章). 所有这些构成了后来的《概率学家的量子概率》(1993) 的初稿, 这个在前面已经提到过了.

之后, 在讨论班文集第 XXIII 卷 (1989) 中, Meyer 构造了鞅结构方程的解, 并指明了它们和量子概率的关系. 这对于 Meyer 来说是一个宣传 Azéma 鞅的令人惊奇的性质的机会, 这些性质可以通过对于实值布朗运动关于其符号生成的信息流做投影来得到, 这一点在那本巨著的第 XXI 章的讨论中提到过.

所有这些工作, 这些发表的文章带来了丰硕的成果: 它们激起了法国概率学者对于量子概率的兴趣. 我记得, 在那几年, Meyer 经常利用探望住在巴黎地区的父母的机会, 星期六的早上在巴黎第六大学概率论实验室做一些非正式的学术报告. 就是在这个阶段, Ph. Biane 很快地消化吸收量子概率的内容, 几年之后, 他成为了 Voiculescu 发明的自由概率理论研究的学术领军人物之一.

那几年的讨论班系列文集也被“Meyer 的听众”对于他关于量子概率理论的不停地质询的回答而极大地丰富着. 最后, 关于“第一阶段”的尾声, 我必须提及在讨论班文集第 XXIV 卷 (1990) 中, Meyer 发表的 3 篇有关量子扩散的文章.

(6.3) 关于第二阶段, 人们一定会注意到 Meyer 发表在讨论班文集第 XXVII 卷 (1993) 上的 4 篇文章, 依旧是关于量子概率的 (在他的 LNM1539 出版的时候写的).

直到当下, 就是 2005 年, 讨论班系列仍旧是每年出一卷, M.Émery (斯特拉斯堡) 和 M.Ledoux (图卢兹) 负责到 2004 年, 之后, 一个新的编辑队伍来负责这一工作[1]. 我们希望 Meyer 对于讨论班系列的最初的设想依然鲜明地保持着：许多文章来自于年轻的研究者, 同时以出版介绍近期最新发展的专题课程为特色, 并且尽力模仿 Meyer 的快速写作机器 (Very Quick Writing Machine). (抱歉, 在英文里 VQWM 看上去根本不像 TGV (法国高速列车)[2], 我好奇这是为什么?)

随机过程的一般理论 (简记为 GTP) 成为数理金融学 (基础理论) 中不可替代的工具. 这一点 (维也纳的) W. Schachermayer (参见 2000 年 St-Flour 暑期学校文集的开始部分) 和 (苏黎世 ETH 的) F. Delbaen 已经清楚地说出来了. 在 Meyer 去世以后, Delbaen 写到 (主要内容是): “我们时常用到 GTP, 我们称之为 ‘Meyer 的东东’, 就像是 Paul-André 尽力为我们打开这扇门一样 ……” 我很好奇 Meyer 听到这个会怎么想? 我想我能理解, 这有点像 D. Williams 在英国, J. Pitman 在伯克利, 还有其他一些例子 …… 他对于 GTP 在数理金融学起的作用始终有点怀疑、有点嘲讽, 甚至有点悲哀. 不过在数学的历史上, 我们熟知许多这样的角色转换, 从最理论的研究到最实际的应用. 但是, 这里的情形是不是真是这样?

无论这个问题的回答是什么, 这个 GTP 的应用领域, 希望将来还有别的, 都反映出 GTP 的阿丽亚娜金线的针对性, 而 Meyer 既是它的奠基者也是辛苦工作的工匠 …….

GTP 的阿丽亚娜金线, 对于 Meyer 来讲, 在于凸显出在 Markov 框架下的研究中 (从 Kunita-Watanabe (1967) 的开创性工作开始) “鞅的支撑作用”, 然后再极力避免利用 Markov 性 …… 在人们仔细考察许多随机现象时, 这个 Markov 性都是值得探讨的. 尽管, 相反的, 在可以被 “嵌入” 到一个足够大的测度空间的条件下, 任何过程都可以看成是 Markov 过程 (比如 Knight 的预期理论 (1975), 在同一作者的书 (1991) 里有详细的讨论).

§7 Paul-André Meyer, 这个人

在最后这一节里, 我想一边总结他作为一个数学家的活动, 一边来讲一些 Paul-André Meyer 的其他方面, 至少是那些我有幸能够接触到的. 我发现要找适当的词语非常困难, 因为他自己很不喜欢任何的标签. 我可不可以说, 他是一个无与伦比的“研究指导者”[3], 在这个称号最完全的意义上都是如此, 他知道自己在往何处去,

[1]译校者注: 目前 (2011 年末), 这套丛书的编辑是 M. Émery, C. Donati-Martin, A. Rouault, C. Stricker.

[2]译校者注: 在法语里, train 既有印刷机 (里的活动模板) 之意, 也有火车之意, 所以高速印刷机可以缩写成 TGV.

[3]译校者注: 这里的原文是 “Directeur de Recherches”, 是法国国家科研中心 (CNRS) 中教授一级的主任研究员职称.

并邀请自己的学生和他身边的每一个人跟随他? 这是真的, 但是所有和他一起工作过、在他身边生活过的人所感受的比这些远为深刻, 那是一种和 "家庭" 中的长者共处的感觉 —— 事实上当我在 CNRS 工作的时候, 他是我的所谓 "教父" —— 我们对他可以充分信任, 在他身上, 我们可以看到数学的严格和崇高的思想、正直的为人完美地结合在一起.

若干同事, 包括 Nick Bingham, 要我列一张 Paul-André Meyer 的 (直接的) 学生名单: 我当然可以列出像 C. Dellacherie, M. Weil, B. Maisonneuve, D. Bakry, M. Émery, C. Stricker 等一串名字, 但是我发现这个任务几乎是不可能完成的, 因为每一个 —— 年轻的或者不那么年轻的 —— 曾经接触到 Paul-André Meyer 本人或者给概率论讨论班投过稿的数学工作者, 都很清楚地知道他/她欠 Paul-André 多少, 因为他总是会把文章重新写过, 加上他自己的评论, 等等. 那么这些数学工作者是不是也应该看成 Paul-André 的学生呢?

这里我还想写下 Yves Meyer 做的三个评注[①], 他是 Paul-André 的好朋友, 小波专家, 也是 Paul-André 的儿子 Martin 的导师:

- 第一个注是 Meyer 研究概率的原因: "为了理解我们周围的世界" (Meyer 的原话). 不过按照 Paul-André 自己的说法, 这还不够: 要理解这个世界, 我们要么需要有更多的概率论工具, 要么有其他的工具! 这就把我们带到了 Paul-André 关于随机微分几何和量子概率的工作上面.
- 第二个注和第一个注很相关: Meyer 对于其他的文化, 特别是远东的文化, 非常有兴趣, 如果还称不上着迷的话. Meyer 身上有一种热情和求知欲, 让他最终对于文化和宗教有一种开放而学者型的认识.
- 第三个注是说, Meyer 和许多数学家不同, 对于统计作为一个学科有很高的评价. 在他想 "构建" 我的学术背景的年代, 他反复向我解释, 统计并不是把概率论工作者研究出来的工具平凡地实施一下. 与此相反, 统计是建立在数学模型和实际工作者所提出的问题之间延绵不绝的对话之上的. 得益于他的无比谦逊和对他人的尊重, Meyer 让我明白, 某些"纯数学家" 的高傲的论调, 说任何一个概率论工作者都能教好统计, 是一个多么错误的观念 …… 那是在 60 年代; 时至今日 Meyer 的观点已经为大家所接受 …….

回到某些私人的回忆, 在我的脑海中始终保留着在他家的公寓中有幸的几次逗留的珍贵记忆. 在他太太 Geneviève, 有时还有他们的成年子女的陪伴下, 我们交换着一些简单的想法, 更多的时候则是默默无言, 有时候看着他令人惊讶的书架, 上面数学和物理书籍总是和来自世界各地的最好的文学书在竞争地盘.

我和几个同事仍然在时不时地自责, 在他 1994 年退休以后没有敢马上就去打扰他; Paul-André 给予我们的是那么多, 我们实在是不好意思用我们的小问题去烦

[①]原注: 参见《In Memoriam Paul-André Meyer》一书中法国科学院 Yves Meyer 院士的文章《Témoignage of Yves Meyer: "Un chemin vers la lumière"》.

他…….

从科研活动中完全退出进入一种隐居状态是 Paul-André Meyer 的重要部分; 如果大家要证据的话, 可以参阅他本人在 1998 年 1 月写的 "工作简述: 后记" ①, 通篇都充满着幽默和谦逊, 并且在 2003 年 9 月图卢兹概率研讨会上被公之于众.

作为结论, 我希望法国的教育系统, 或者更广的全世界范围内的大学教育系统, 能够继续努力培养 Meyer 这样的人.

§8 致谢

作者感谢 Geneviève Meyer 夫人提供了 Paul-André 的照片, 并且再次代表整个概率学界对 Paul-André 和他的家庭表示敬意. 感谢 Yves Meyer 的评注, 最后感谢 Christina Goldschmidt 和 Nick Bingham 帮助我尽力去掉文字中的法语味道.



①原注: 即《In Memoriam Paul-André Meyer》一书中的第一篇《Titres et Travaux: Postface》.

C. 德拉歇利和 P. - A. 梅耶的五卷本巨著《概率与位势》是随机分析领域中的经典著作。

本书为《概率与位势》的第 I 卷。前两章包含了完整的积分理论及概率论工作者所需要的该理论的各种变体；第 III 章介绍了解析集和 Choquet 容度的理论；第 IV 章介绍了随机过程理论。

本书可作为概率及随机分析等相关专业本科生、研究生的教学参考书，也可供概率、金融等领域的科研工作者参考。

学科类别：数学

academic.hep.com.cn


ISBN 978-7-04-032294-1

9 787040 322941 >

定价 48.00 元